

Введение

Учение об электричестве включает три группы вопросов. К первой группе относятся основные понятия и общие принципы, управляющие электрическими и магнитными явлениями; ко второй – электрические и магнитные свойства вещества; к третьей – техническое и практическое применение электрических и магнитных явлений.

В курсе физики мы более подробно рассмотрим вопросы первой и второй группы, так как практическое применение электричества рассматривается спецпредметами.

Нужно иметь в виду, что основные понятия и принципы, установлены путем обобщения опытных фактов, и имеют ограниченную область применения.

Опыт показывает, что между заряженными телами и проводниками, по которым текут токи, действуют силы называемые электромагнитными силами.

Относительно этих сил выдвигались две теории: теория дальнего действия (без участия каких бы ни было промежуточных посредников) и теория ближнего действия, которая исходит из представления, что любое взаимодействие передается с помощью материального носителя.

Основная идея теории дальнего действия была заимствована из закона всемирного тяготения. Закон всемирного тяготения, сформулированный Ньютоном, позволил определить силу всемирного тяготения, но не объяснил природу взаимодействия. По мнению ученых, силы тяготения, электрические и магнитные силы не нуждаются в объяснении, а являются неотъемлемым, врожденным свойством материи и задача заключается только в том, чтобы установить закон этого взаимодействия.

Благодаря трудам Лапласа, Ампера, Пуассона, Гаусса, Остроградского теория дальнего действия достигла высокой степени совершенства. Теория отличалась формальной простотой и ясностью исходных математических положений, математической строгостью и стройностью. Она совершенно не вводила гипотетических представлений о физической природе сил, а основывалась только на опытных прочно установленных фактах и их обобщениях.

Фарадей считал, что действие на расстоянии физически бессодержательно и действие одного тела на другое может осуществляться либо при непосредственном соприкосновении, либо передаваться через промежуточную среду. Эту среду Фарадей назвал полем. В своих рассуждениях Фарадей использовал в основном качественную сторону явлений.

Современники с трудом воспринимали идеи Фарадея и даже отвергали их.

Максвелл, в совершенстве владея математическим методом исследования, облек идеи Фарадея в математическую форму. Он не только обобщил известные опытные факты, но и предсказал новые. Ему удалось сформулировать систему уравнений, в которой в сжатой и точной форме содержатся все количественные законы электромагнитного поля.

Уравнения Максвелла являются результатом обобщения опытных фактов. Их доказательство надо искать в сопоставлении с опытом выводимых из них следствий.

Одним из таких доказательств может служить открытие Герцем существования электромагнитных волн, предсказанное теорией Максвелла. Свойства электромагнитных волн оказались именно таким, какие предсказывались теорией Максвелла.

В электродинамике уравнения Максвелла играют ту же роль, что и законы Ньютона в динамике.

Тема 1.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Зарождением науки об электричестве мы обязаны Гильберту, который изготовил первый электроскоп и показал, что свойством притяжения мелких предметов обладает не только янтарь, но и другие вещества. Он же ввел абстрактное понятие «электричество». Благодаря Гильберту наука об электричестве была обогащена многочисленными новыми явлениями и точными наблюдениями.

Первую электрофорная машина, изобретенная Отто фон Герике, позволила сделать наблюдаемые эффекты более наглядными.

В 1733 году Шарль Дюфе экспериментально доказал, что в природе существует два вида зарядов; одноименные – отталкиваются, разноименные – притягиваются.

Но особенно возрос интерес к электрическим явлениям после изобретения конденсатора.

Лейденский профессор Мушенбрук пытался получить наэлектризованную воду, которая считалась полезной для здоровья. Продев в горлышко банки с водой гвоздь, он дотронулся им до проводника действующей электрофорной машины. Затем он второй рукой прикоснулся к гвоздю и испытал сильный удар, так, что «даже все тело содрогнулось как от молнии».

Нолле повторил эти опыты, убив при этом несколько птиц, после чего призывал с осторожностью обращаться с этой новой вещью, которая «может оживать и раздражаться».

Бенджамин Франклин экспериментально показал электрическую природу молнии.

Изобретение конденсатора и доказательство электрической природы молнии имело сильный психологический эффект – способствовало образованию целой армии физиков, убежденных в том, что исследование электрических явлений – достойное занятие для ученого.

1.1.3. Электрический заряд. Закон Кулона.

Как показывает опыт, в природе существует взаимодействие, сила которого с изменением расстояния изменяется, так же как и сила всемирного тяготения, но эта сила во много раз (10^{39}) превышает гравитационное взаимодействие. Это взаимодействие получило название электрического, а тела участвующие в нем называют наэлектризованными или обладающими электрическим зарядом.

Из обобщения опытных фактов были установлены основные свойства электрического заряда.

В природе существует два вида электрических зарядов – положительные и отрицательные. Одноименные заряды отталкиваются, разноименные притягиваются.

Электрический заряд дискретен, т.е. заряд каждого тела кратен некоторому элементарному заряду ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл).

Электрический заряд неотъемлемое свойство элементарных частиц материи – в природе существуют положительно заряженные частицы (протон), отрицательно заряженные частицы (электрон) и частицы, не имеющие заряда (нейтрон), но заряд отдельно от частицы не существует.

М. Фарадей установил закон сохранения электрического заряда – *алгебраическая сумма зарядов любой замкнутой системы остается величиной постоянной*. Другими словами электрические заряды не создаются и не пропадают, они могут быть либо переданы от одного тела к другому, или перемещены внутри одного тела.

Электрический заряд величина релятивистки инвариантная, т.е. не зависит от системы отсчета, а значит, не зависит от скорости движения заряда.

В конце 18 века появилась настоятельная необходимость перехода от качественного исследования электрических явлений к количественным, различать и определять количественные величины, необходимость связать их математическими соотношениями, начать измерять их с помощью приборов.

В 1784 году Кулон закончил свое блестящее исследование упругого кручения нити. Он установил, что сила закручивания нити пропорционально углу закручивания нити. Это давало новый, исключительно чувствительный метод измерения силы путем сравнения с силой, возникающей при закручивании нити. Новый прибор получил название крутильных весов.

Закон взаимодействия точечных зарядов был установлен Кулоном в 1785 году с помощью крутильных весов. *Точечным зарядом называется заряд, сосредоточенный на теле, размерами которого в данных условиях можно пренебречь*.

Закон Кулона – *сила взаимодействия двух точечных зарядов, расположенных в вакууме, пропорциональна произведению зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами и направлена вдоль прямой, проходящей через центры зарядов*.

$$F = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \quad 1.1$$

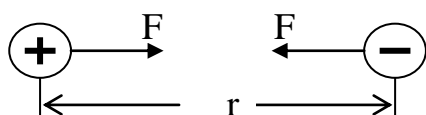


Рис. 1. К закону Кулона.

Сила F называется кулоновской силой. Эта сила является центральной (рис. 1).

Если заряды находятся в однородной и изотропной среде, то закон Кулона имеет вид:

$$F = k \frac{q_1 \cdot q_2}{\varepsilon \cdot r^2}, \quad 1.2$$

где ϵ - диэлектрическая проницаемость среды, величина, показывающая во сколько раз уменьшается сила взаимодействия зарядов в среде по сравнению с вакуумом.

Значение коэффициента k зависит от выбора системы единиц. В международной системе (СИ) коэффициент k принимается равным

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad 1.3$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$ - электрическая постоянная. Она относится к числу фундаментальных физических постоянных.

В настоящее время имеется большое количество экспериментальных данных показывающих, что закон Кулона выполняется очень точно и притом как для очень больших, так и для очень малых расстояний. В частности, исследования атомных явлений позволяет заключить, что он справедлив, по крайней мере, вплоть до расстояний порядка 10^{-15} м.

2.1.3. Электрическое поле. Напряженность поля.

При исследовании взаимодействия электрических зарядов возникает вопрос, почему возникают силы, действующие на заряды, и как они передаются от одного заряда к другому?

Для понимания происхождения и передачи сил, действующих между покоящимися зарядами, необходимо допустить наличие между зарядами какого-то физического агента, осуществляющего это взаимодействие. Этим агентом, по мнению М. Фарадея, является *электрическое поле*. Когда в каком либо месте появляется электрический заряд, то вокруг него появляется электрическое поле.

Основное свойство электрического поля заключается в том, что на всякий другой заряд, помещенный в это поле, будет действовать сила. Мы будем рассматривать электрические поля создаваемые неподвижными электрическими зарядами и называемые *электростатическими полями*.

Для обнаружения и опытного исследования, электростатических полей используется пробный электрический заряд. В качестве пробного заряда используется точечный, положительный заряд.

Опыт показывает, что отношение силы F , действующей на неподвижный пробный заряд q , помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда, не зависит от величины заряда q и может быть принято за характеристику поля в данной точке. Указание на неподвижный заряд имеет принципиальное значение. Дело в том, что силы, действующие на электрический заряд, зависят не только от электрического, но и от магнитного поля. Однако магнитное поле, как показывает опыт, действует только на движущийся

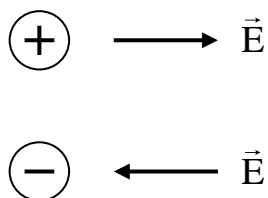


Рис. 2. Направление вектора напряженности электрического поля

электрический заряд и не действует на неподвижный заряд.

Напряженностью электрического поля E называется физическая величина численно равная силе F , действующей на положительный единичный заряд, помещенный в данную точку поля.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad 1.4$$

Как следует из формул 1.1 и 1.4 для поля точечного заряда q , будем иметь:

$$E = k \frac{q}{r^2} \quad 1.5$$

Вектор напряженности электрического поля совпадает по направлению с направлением силы, действующей на положительный заряд. Поэтому вектор напряженности электрического поля направлен от положительного заряда к отрицательному заряду (рис. 2).

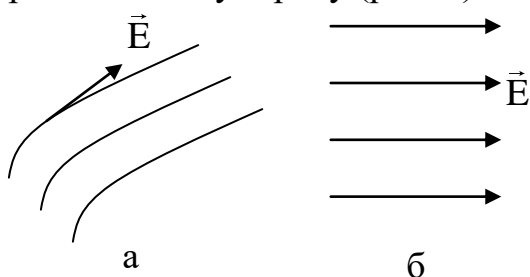


Рис. 3. К определению силовых линий электрического поля.

Для описания электрического поля нужно задать вектор напряженности в каждой точке поля. Это можно сделать аналитически, выражая зависимость напряженности поля от координат, в виде формул. Однако такую зависимость можно представить и графически, используя так называемые силовые линии (линии напряженности).

Непрерывная линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с вектором напряженности электрического поля называется силовой линией поля (рис. 3а).

Если в каждой точке поля вектор напряженности остается величиной постоянной, то поле называется **однородным**. Силовые линии такого поля представляют собой прямые параллельные линии (рис. 3б). Силовые линии электрического поля начинаются на положительном заряде и заканчиваются на отрицательном заряде (рис. 4). Поэтому иногда говорят, что положительный заряд можно считать истоком электрического поля, а отрицательный заряд – стоком поля.

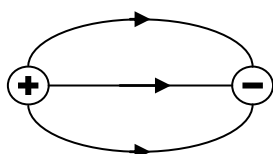


Рис. 4. К определению направления силовых линий поля

Если электрическое поле создается не одним, а несколькими зарядами, то на основании принципа независимости действия сил $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$, можно утверждать, что **напряженность результирующего электрического поля будет равна геометрической сумме напряженностей, создаваемых каждым зарядом в отдельности, т.е.**

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \quad 1.6$$

Формула 1.6 выражает принцип суперпозиции полей. Используя принцип суперпозиции полей можно рассчитать напряженность поля создаваемого протяженным электрическим зарядом.

3.1.3. Поток вектора напряженности электростатического поля. Теорема Гаусса.

Чтобы с помощью линий напряженности можно было характеризовать не только, направление, но и величину вектора напряженности электрического поля, условились проводить их с определенной густотой: число линий, пронизывающих единицу поверхности, перпендикулярной к линиям напряженности, должно быть равно модулю вектора напряженности. Тогда число линий напряженности, пронизывающих элементарную площадку dS , нормаль к которой

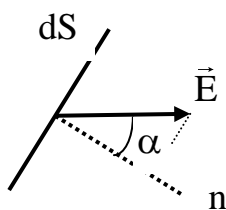


Рис. 5. К определению потока вектора напряженности электрического поля.

образует угол α с вектором напряженности E , будет равно $E \cdot dS \cdot \cos \alpha$. Величина

$d\Phi = E \cdot dS \cdot \cos \alpha = E_n \cdot dS$ называется потоком вектора напряженности через площадку dS (рис. 5). Для произвольной поверхности S поток вектора напряженности Φ определяется по формуле

$$\Phi = \int_S E_n \cdot dS, \quad 1.7$$

где интегрирование должно быть произведено по всей поверхности S .

Поток вектора напряженности величина скалярная. Знак потока зависит не только от электрического поля, но и выбора положительного направления нормали \vec{n} к поверхности. Как правило, за положительное направление нормали принимается направление внешней нормали к поверхности.

Расчет электрических полей значительно упрощается, если использовать теорему Гаусса, теорему, определяющую поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность. Она была установлена М.В.Остроградским в виде некоторой общей математической теоремы и Гауссом – применительно к случаю электрического поля. Докажем теорему вначале для точечного заряда q .

Окружим точечный заряд сферой радиуса R (рис. 6) и тогда для потока вектора напряженности, с учетом формул 1.7 и 1.5 получим:

$$\Phi = \int_S E \cdot dS = E \int_S dS = E \cdot S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad 1.8$$

Полученный результат будет справедлив и для любой другой замкнутой поверхности. Если поверхность не охватывает зарядов, то $\Phi = 0$. В этом случае линии напряженности и входят, и выходят из поверхности.

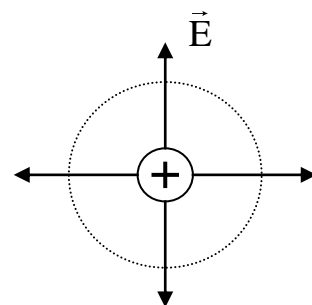
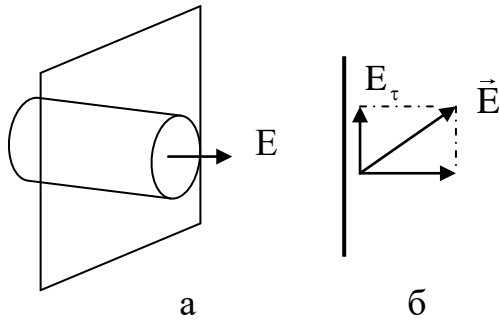


Рис. 6. К доказательству теоремы Гаусса

В общем случае, когда замкнутая поверхность охватывает N электрических зарядов



$$\Phi = \sum_{i=1}^N \Phi_i = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{\epsilon_0}. \quad 1.9$$

Формула 1.9 выражает теорему Гаусса – *поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, охватываемых этой поверхностью, деленной на электрическую постоянную.*

Рис. 7. Поле равномерно заряженной плоскости.

Используя теорему Гаусса можно рассчитать напряженность электрического поля во многих случаях.

Рассмотрим некоторые примеры.

Равномерно заряженная плоскость.

Пусть имеется бесконечная плоскость, равномерно заряженная с поверхностной плотностью заряда σ . Очевидно, что вектор напряженности \vec{E} в этом случае, будет перпендикулярен плоскости. В противном случае, появится составляющая вектора напряженности E_{\parallel} (рис. 7б), направленная параллельно плоскости и приводящая к изменению распределения заряда на плоскости, что противоречит условию.

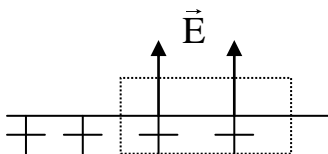
В этом случае в качестве замкнутой поверхности удобно выбрать прямой цилиндр, перпендикулярный к заряженной плоскости, ограниченный двумя плоскими основаниями, перпендикулярными к линиям напряженности и расположенными по обе стороны плоскости (рис. 7а).

Так как вектор напряженности не пронизывает боковой поверхности цилиндра, то $\Phi = 2 \cdot E \cdot S$, но по теореме Гаусса $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0}$. Из равенства правых

частей этих выражений следует, что равномерно заряженная плоскость создает однородное электрическое поле с напряженностью

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad 1.10$$

Поле у поверхности заряженного проводника.



Учитывая, что вектор напряженности поля перпендикулярен поверхности проводника (рис. 8) и поле внутри проводника отсутствует, можно

получить: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ или

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{E} = \vec{D}. \quad 1.11$$

Рис. 8. Поле у поверхности проводника

Величина D получила название электрического смещения, так как у поверхности заряженного проводника она равна поверхностной плотности заряда σ , т.е. величине заряда, сместившегося внутри проводника, на единицу площади поверхности.

Как видно из полученного выражения напряженность электрического поля в этом случае не зависит от формы проводника и распределения зарядов на нем.

Поле двух заряженных пластин.

Рассмотрим электрическое поле создаваемое двумя равномерно заряженными пластинами. При появлении на одной из пластин заряда с поверхностной плотностью $+\sigma$, на второй пластине появляется заряд противоположного знака с поверхностной плотностью $-\sigma$ (рис. 9). Эти заряды под действием силы взаимного притяжения будут сосредоточены на внутренних поверхностях пластин. Заряженные плоскости каждой пластины создают по обе стороны от себя электрическое поле с

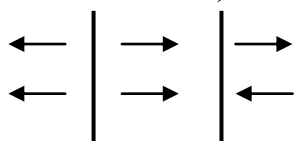


Рис. 9. Поле двух заряженных плоскостей

напряженностью, выражаемой формулой $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon \cdot \varepsilon_0}$.

Вне пластин эти напряженности направлены в разные стороны и их сумма равна нулю (рис. 9). Между пластинами, напротив, эти поля направлены в одну сторону и, складываясь, дают

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}. \quad 1.12$$

Поле равномерно заряженной нити.

Рассмотрим электрическое поле, создаваемое равномерно заряженной с линейной плотностью заряда τ нитью. В качестве замкнутой поверхности в этом случае удобно взять цилиндрическую поверхность, ось которой совпадает с нитью (рис. 10). Очевидно, что и в этом случае вектор напряженности перпендикулярен нити и будет пронизывать боковую поверхность цилиндра. Следовательно, поток вектора напряженности

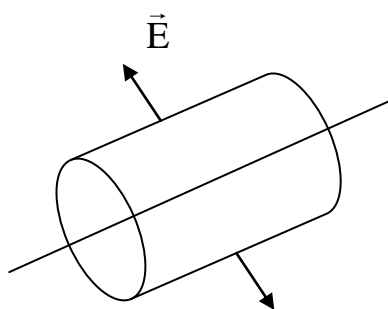


Рис. 10. Поле равномерно заряженной нити

$\Phi = E \cdot 2\pi r \cdot \ell$, но по теореме Гаусса $\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\tau \cdot \ell}{\varepsilon_0}$. Из

равенства правых частей этих выражений следует, что напряженность электрического поля равномерно заряженной нити определяется выражением

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\tau}{\varepsilon \cdot r}. \quad 1.13$$

4.1.3. Работа по перемещению заряда в поле. Потенциал. Разность потенциалов.

Найдем работу электрического поля, создаваемого точечным электрическим зарядом q_0 , при перемещении заряда q из точки В в точку С (рис.11). По

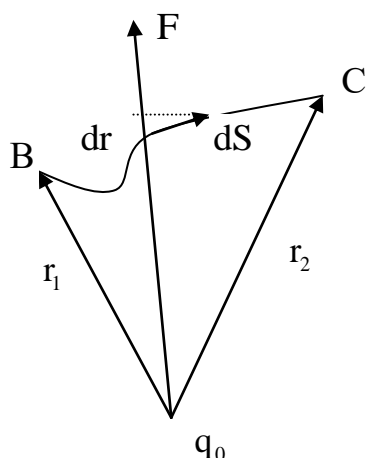


Рис. 11. К определению работы поля по перемещению заряда

определению работа на малом участке пути определяется по формуле $dA = F \cdot dS \cdot \cos \alpha$.

Учитывая, что $dS \cdot \cos \alpha = dr$ и $F = k \frac{qq_0}{r^2}$, полу-

чим для элементарной работы $dA = k \frac{qq_0}{r^2} dr$.

Интегрируя полученное выражение, будем иметь:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} k \frac{qq_0}{r^2} dr = -kqq_0 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad 1.14$$

Введем функцию

$$\phi = k \frac{q_0}{r} + C. \quad 1.15$$

Функция ϕ , определяемая выражением 1.15, называется **потенциалом электрического поля в данной точке**. С учетом 1.15 выражение 1.14 примет вид

$$A = -q(\phi_2 - \phi_1). \quad 1.16$$

Величину $(\phi_2 - \phi_1) = \Delta\phi$ называют **разностью потенциалов** между двумя точками электрического поля. Из 1.16 следует, что разность потенциалов численно равна работе сил поля при перемещении единичного положительного заряда между этими точками поля.

Понятие разности потенциалов широко используют по двум причинам.

Во-первых, описание электрического поля при помощи потенциала гораздо проще, чем при помощи напряженности поля. Напряженность поля вектор, в то время как потенциал есть скаляр и вполне определен в каждой точке одной величиной – своим численным значением.

Во-вторых, разность потенциалов гораздо проще измерить на опыте, чем напряженность поля. Для измерения напряженности электрического поля нет удобных методов, в то же время существуют многочисленные методы измерения разности потенциалов и разнообразные приборы.

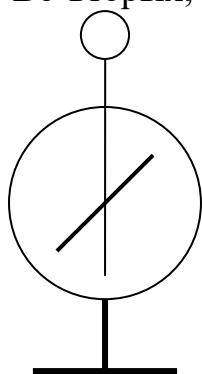


Рис. 12. К устройству электрометра

Разность потенциалов достаточно просто измерить на опыте. Для этого служат приборы, называемые электрометрами или электростатическими вольтметрами.

Простейший электрометр содержит легкую стрелку, упрямленную на металлическом стержне. Стрелка может поворачиваться вокруг горизонтальной оси. Стержень со стрелкой помещают внутрь металлического корпуса,

чтобы защитить от влияния внешних электрических полей и хорошо изолируют от него (рис. 12). Прибор имеет шкалу, позволяющую отсчитывать угол отклонения стрелки прибора.

Для измерения разности потенциалов (напряжения) между Землей и заряженным проводником корпус прибора заземляют, а стержень соединяют с заряженным телом.

Легко показать, что отклонение стрелки электрометра будет зависеть только от напряжения существующего между стрелкой и корпусом. Так как электрометр имеет металлический корпус, то электрическое поле, возникающее в нем, будет зависеть только от напряжения приложенного к электрометру. В электрическом поле на стрелку будут действовать силы, приводящие к ее отклонению от вертикали. Прибор можно проградуировать, т.е. определить каким напряжениям соответствуют различные углы отклонения стрелки.

Данный электрометр очень удобен для измерения высоких ($10^3 \div 10^4$ В) напряжений, а для измерения малых разностей потенциалов применяются другие методы.

Выбор произвольной постоянной C в выражении 1.15 может быть произвольным. Простейший случай мы получим, если положим $C = 0$ и тогда потенциал точки, удаленной в бесконечность, будет равен нулю. В этом случае

$$\varphi = k \frac{q}{r} = \frac{A}{q} \quad 1.17$$

Потенциал данной точки электрического поля численно равен работе, которую совершают силы поля при перемещении положительного единичного заряда из бесконечности в данную точку поля.

На практике оказалось удобнее считать потенциал земной поверхности равным нулю.

Потенциал электростатического поля представляет собой функцию, меняющуюся от точки к точке. Однако во всяком реальном случае можно выделить совокупность точек имеющих одинаковый потенциал.

Геометрическое место точек, имеющих одинаковый потенциал, называется поверхностью равного потенциала или эквипотенциальной поверхностью.

Электрическое поле можно изображать не только с помощью линий напряженности, но и с помощью эквипотенциальных поверхностей. При этом нужно иметь в виду, что линии напряженности всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. В случае точечного заряда эквипотенциальные поверхности представляют собой сферы с центром, совпадающим с точечным зарядом

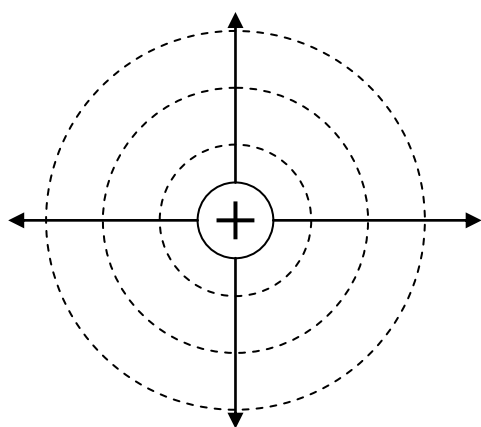


Рис. 13. Линии напряженности и эквипотенциальные поверхности точечного заряда.

представляют собой сферы с центром, совпадающим с точечным зарядом (пунктирные линии на рис. 13).

Из выражения 1.16 следует, что работа сил электрического поля не зависит от формы и длины пути, но определяется начальным и конечным положением заряда в поле. Работа сил электрического поля на замкнутом пути ($\varphi_1 = \varphi_2$) равна нулю. Следовательно, электрическое поле является потенциальным, а электрические силы консервативны.

Ранее мы показали, что работа консервативных сил равна изменению потенциальной энергии, взятой с противоположным знаком $A = -(W_2 - W_1)$. Поскольку в бесконечности $W_1 = 0$, то $A = -W_2 = -q\varphi$. Следовательно, потенциальная энергия заряда в поле определяется по формуле

$$W = q \cdot \varphi. \quad 1.18$$

Из данного выражения следует, что **потенциал – энергетическая характеристика поля.**

5.1.3. Напряженность электрического поля как градиент потенциала.

Установим теперь связь между напряженностью поля и потенциалом. Существование такой связи следует из того факта, что работа электрических сил, выражаемая через напряженность, может быть выражена и через разность потенциалов.

Найдем работу по перемещению заряда в направлении оси X. С одной стороны $dA = E_x \cdot dx \cdot q$, но с другой - $dA = -q \cdot d\varphi$. Отсюда следует, что $E_x = -\frac{d\varphi}{dx}$.

Рассуждая аналогично, можно получить, что $E_y = -\frac{d\varphi}{dy}$, $E_z = -\frac{d\varphi}{dz}$. Тогда в общем случае будем иметь

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k} \right) = -\text{grad}\varphi = -\nabla\varphi \quad 1.19$$

Напряженность электрического поля равна градиенту потенциала, взятому с противоположным знаком. Знак минус говорит о том, что напряженность поля всегда направлена в сторону убывания потенциала.

Для однородного электрического поля выражение 1.19 принимает вид

$$E = -\frac{\Delta\varphi}{d}, \quad 1.20$$

где d – расстояние между двумя точками, $\Delta\varphi$ - разность потенциалов между ними.

Для поля со сферической или цилиндрической симметрией выражение 1.19 имеет вид

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}. \quad 1.21$$

6.1.3. Циркуляция вектора напряженности электрического поля по замкнутому контуру.

Если в качестве заряда, переносимого в поле, взять положительный единичный заряд, то работу по его перемещению на пути $d\vec{l}$ можно найти по формуле: $dA = F \cdot d\vec{l} \cdot \cos \alpha$, но в этом случае, $\vec{F} = \vec{E}$, $d\vec{l} \cos \alpha = d\vec{l}$ и, следовательно, $dA = \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Для определения работы на замкнутом пути это выражение необходимо проинтегрировать - $A = \oint_1 \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Выражение $\oint_1 \vec{E} \cdot d\vec{l}$ называется циркуляцией вектора напряженности электрического поля. Ранее мы показали, что работа сил электрического поля на замкнутом пути равна нулю и, значит

$$\oint_1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad 1.22$$

Равенство нулю этого интеграла говорит о том, что в природе существует два вида электрических зарядов, являющихся истоками и стоками электрического поля.

Тема 2.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В СРЕДЕ. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКОВ

1.2.3. Электрический диполь. Диполь в однородном и неоднородном поле.

Рассмотрим два точечных заряда величиной $+q$ и $-q$, жестко связанных между собой и смещенных на расстояние l друг от друга. Такую пару зарядов называют электрическим диполем.

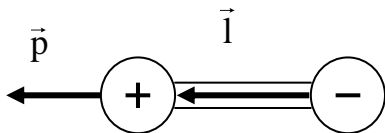


Рис. 14. К определению электрического диполя.

Вектор \vec{l} , направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и равный расстоянию между зарядами, называется плечом диполя. Вектор

$$\vec{p} = q \cdot \vec{l} \quad 2.1$$

называется дипольным моментом или электрическим моментом диполя (рис. 14).

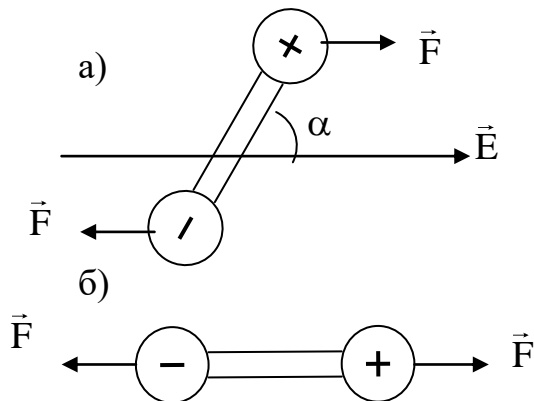


Рис. 15. Диполь в однородном электрическом поле

Во внешнем однородном электрическом поле на диполь будет действовать момент пары сил \vec{F} (рис. 15).

$$M = F \cdot l \cdot \sin \alpha = |q| \cdot E \cdot l \cdot \sin \alpha = p \cdot E \cdot \sin \alpha.$$

Очевидно, что $M = 0$ при $\sin \alpha = 0$, т.е. в однородном электрическом поле диполь ориентируется так, что его дипольный момент

направлен вдоль вектора напряженности поля (рис. 15 б). Рассмотрим, как будет себя вести диполь в неоднородном поле. В этом случае диполь будет обладать потенциальной энергией $W = q(\varphi_+ - \varphi_-)$.

Так как $(\varphi_+ - \varphi_-) = \frac{d\varphi}{dx} \cdot l \cdot \cos \alpha$ и $\frac{d\varphi}{dx} = -E$, то для потенциальной энергии полу-

чим выражение $W = -p \cdot E \cdot \cos \alpha$. Ранее мы показали, что $F_x = -\frac{dW}{dx}$ и значит,

что на диполь в этом случае будет действовать сила $F_x = p \cdot \frac{dE}{dx} \cdot \cos \alpha$. При

$\alpha < \frac{\pi}{2}$ диполь будет втягиваться в поле ($F_x > 0$) и при $\alpha > \frac{\pi}{2}$ выталкивается из поля ($F_x < 0$).

2.2.3. Виды диэлектриков.

Диэлектрики (как и всякое вещество) состоят из атомов и молекул. Положительный заряд сосредоточен в ядрах атомов и молекул, а отрицательный – в электронных оболочках атомов. Так как положительный заряд всех ядер молекулы равен суммарному заряду электронов, то молекула в целом нейтральна и, ее можно рассматривать как электрический диполь с дипольным моментом, определяемым по формуле 2.1.

Первую группу диэлектриков (азот, водород, кислород и др.) составляют вещества, молекулы которых имеют симметричное строение и, следовательно, дипольный момент \vec{p}_i такой молекулы равен нулю. Молекулы таких диэлектриков называются неполярными. Во внешнем электрическом поле с напряженностью \vec{E} заряды неполярных молекул смещаются в разные стороны (деформационная или электронная поляризация) и диэлектрик приобретает дипольный момент

$$\vec{p}_v = n \cdot \beta \cdot \varepsilon_0 \cdot V \cdot E, \quad 2.2$$

где β - коэффициент пропорциональности, называемый поляризуемостью молекулы и зависящий от строения молекулы, ε_0 - электрическая постоянная, V – объем диэлектрика.

Вторую группу диэлектриков (вода, окись углерода, метан) образуют вещества молекулы, которых имеют асимметричное строение и значит, молекулы их обладают дипольным моментом $\vec{p}_i \neq 0$. Молекулы таких диэлектриков называют полярными. В отсутствии внешнего электрического поля, вследствие хаотического теплового движения, дипольные моменты молекул ориентированы хаотически и результирующий дипольный момент равен нулю. Если такой диэлектрик поместить во внешнее электрическое поле, то силы этого поля будут стремиться повернуть диполи вдоль поля (ориентационная поляризация) и диэлектрик приобретает дипольный момент

$$\vec{p}_v = n \cdot \frac{\vec{p}_i}{3kT} \cdot E \cdot V, \quad 2.3$$

где n – концентрация молекул, \vec{p}_i – дипольный момент молекулы, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, V – объем диэлектрика.

Как видно из этого выражения ориентационная поляризация зависит от абсолютной температуры.

Третью группу диэлектриков (NaCl , KCl , KBr) представляют так называемые ионные кристаллы, представляющие собой кристаллические решетки с правильным чередованием ионов различных знаков. В этом случае нельзя рассматривать отдельные молекулы, а нужно рассматривать как две подрешетки вдвинутые друг в друга. При помещении такого диэлектрика во внешнее электрическое поле решетки смещаются относительно друг друга (ионная поляризация) и диэлектрик приобретает дипольный момент отличный от нуля.

Итак, внесение диэлектрика во внешнее электрическое поле приводит к возникновению отличного от нуля результирующего дипольного момента, или иными словами к поляризации диэлектрика.

3.2.3. Поляризация диэлектриков. Напряженность электрического поля в диэлектрике.

Во внешнем электрическом поле диэлектрик поляризуется, т.е. приобретает отличный от нуля дипольный момент $\vec{p}_v = \sum \vec{p}_i$, где \vec{p}_i – дипольный момент отдельной молекулы.

Степень поляризованности макроскопического тела принято характеризовать вектором поляризованности \vec{p} , который в случае однородно поляризованного тела, определяется как дипольный момент единицы объема тела:

$$\vec{p} = \frac{\vec{p}_v}{V}. \quad 2.4$$

В случае неоднородно поляризованного тела поляризованность определяется для каждого физически малого объема

$$\vec{p} = \frac{d\vec{p}_v}{dV}. \quad 2.5$$

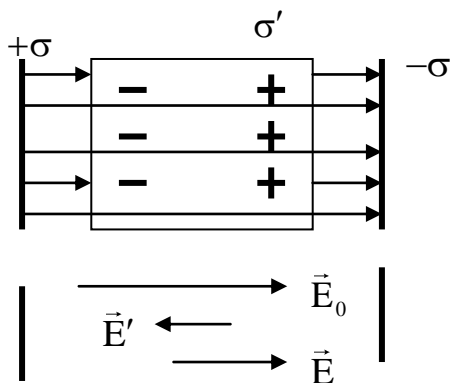


Рис. 16. Поляризация диэлектрика

Способность вещества изменять свою поляризованность под действием внешнего электрического поля характеризует диэлектрическая восприимчивость χ_e . Опыт показывает, что для большинства веществ (исключение сегнетоэлектрики)

$$\vec{p} = \chi_e \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}, \quad 2.6$$

где χ_e – диэлектрическая восприимчивость, величина безразмерная, больше нуля и составляет несколько единиц, хотя есть и исключения (во-

да, спирт).

Для определения напряженности электрического поля в диэлектрике рассмотрим следующий опыт. Поместим пластинку из диэлектрика в однородное электрическое поле с напряженностью \vec{E}_0 , создаваемое бесконечными заряженными пластинами (рис. 16). Под действием электрического поля заряды в диэлектрике смещаются: отрицательные против поля, положительные по полю. В результате этого на поверхностях пластинки появляются связанные электрические заряды, создающие дополнительное электрическое поле с напряженностью \vec{E}' . Согласно принципу суперпозиции полей напряженность поля в диэлектрике будет определяться по формуле

$$E = E_0 - E' . \quad 2.7$$

Так как поле E' создается заряженными плоскостями, то

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} , \quad 2.8$$

где σ' - поверхностная плотность связанных зарядов.

Определим поверхностную плотность связанных зарядов σ' . Полный дипольный момент диэлектрика по 2.4 равен $p_v = p \cdot V = p \cdot d \cdot S$, но с другой стороны $p_v = q \cdot d = \sigma' \cdot S \cdot d$, следовательно,

$$\sigma' = p . \quad 2.9$$

С учетом 2.9 и 2.4 выражение 2.6 примет вид:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}(1 + \chi_e) . \quad 2.10$$

Обозначив

$$1 + \chi_e = \epsilon , \quad 2.11$$

для напряженности поля в диэлектрике окончательно получим:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon} , \quad 2.12$$

где ϵ - **диэлектрическая проницаемость вещества, показывающая во сколько раз уменьшается напряженность электрического поля в диэлектрике по сравнению с вакуумом.**

Выражение 2.12 показывает, что напряженность электрического поля \vec{E} зависит от свойств среды.

4.2.3. Электрическое смещение. Теорема Гаусса для электрического смещения.

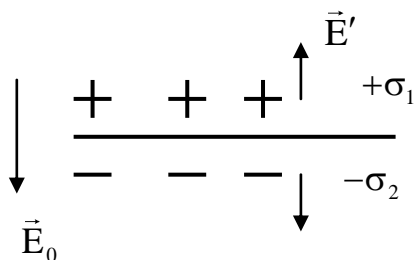


Рис. 17. Электрическое поле на границе раздела двух сред.

Рассмотрим теперь границу раздела двух однородных диэлектриков I и II (рис. 17). В каждом диэлектрике вблизи границы раздела появятся поляризационные заряды с поверхностной плотностью σ'_1 и σ'_2 , которые будут иметь противоположные знаки. Граница раздела

окажется заряженной с поверхностной плотностью $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$, отчего появляется дополнительное электрическое поле с напряженностью $E' = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0}$, перпендикулярной к границе раздела двух сред.

Тогда напряженность поля в первой среде

$$E_1 = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0},$$

а во второй среде

$$E_2 = E_0 + E' = E_0 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0}.$$

Мы видим, что на границе раздела двух диэлектриков напряженность поля претерпевает скачкообразное изменение, что приводит к дополнительным трудностям при расчете электрических полей. Поэтому на практике оказалось необходимым помимо напряженности характеризовать электрическое поле еще одной величиной.

Рассмотрим разность напряженностей электрического поля в двух средах

$$E_2 - E_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\epsilon_0}.$$

С учетом 2.9 данное выражение примет вид:

$$E_2 - E_1 = \frac{P_1 - P_2}{\epsilon_0}. \quad 2.13$$

Выражение 2.13 можно преобразовать к виду

$$\epsilon_0 \cdot \vec{E}_2 + \vec{p}_2 = \epsilon_0 \cdot \vec{E}_1 + \vec{p}_1. \quad 2.14$$

Введем новую величину $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{p}$, которую будем называть **вектором электрического смещения** и тогда можно утверждать, что

$$\vec{D}_1 = \vec{D}_2, \quad 2.15$$

т.е. электрическое смещение одинаково в обеих средах. По этой причине для описания электрического поля в неоднородных диэлектриках гораздо удобнее пользоваться вектором электрического смещения \vec{D} вместо вектора напряженности \vec{E} и в этом заключается основной смысл введения электрического смещения.

Электрическое поле можно изображать с помощью линий электрического смещения (рис. 18). Они в отличие от линий напряженности (рис. 18а) не прерываются на границе раздела двух диэлектриков.

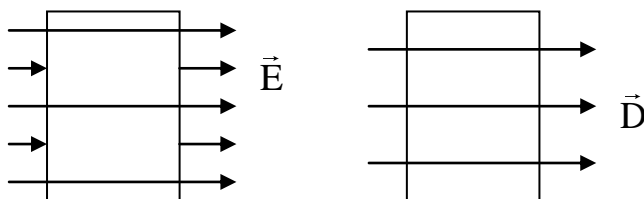


Рис. 18. а) линии напряженности поля;
б) линии электрического смещения

Что же характеризует вектор электрического смещения?

Связанные заряды в диэлектрике появляются под действием внешнего электрического поля, со-

здаваемого свободными электрическими зарядами. Результирующее поле в диэлектрике описывается вектором напряженности \vec{E} и поэтому он зависит от свойств среды. Вектор \vec{D} от свойств среды не зависит и, следовательно, он описывает электростатическое поле, создаваемое свободными электрическими зарядами. Связанные заряды могут, однако, вызвать перераспределение в пространстве свободных зарядов и поэтому электрическое смещение описывает электростатическое поле свободных зарядов, но при таком их распределении, которое имеется при наличии диэлектрика.

В соответствии с выше изложенным, теорему Гаусса для электрического смещения D можно записать в виде

$$\Phi_D = \oint_S D \cdot dS = \sum q, \quad 2.16$$

где учитываются только свободные электрические заряды.

Поток вектора электрического смещения сквозь любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных зарядов.

В такой формулировке теорема Гаусса справедлива для электростатического поля как для однородных и изотропных сред, так и для неоднородных и анизотропных сред.

5.2.3. Сегнетоэлектрики.

Некоторые химические соединения в твердом состоянии имеют весьма необычные электрические свойства. Впервые эти свойства были обнаружены у сегнетовой соли и поэтому этот класс веществ получил название сегнетоэлектриков. Детальное исследование свойств сегнетовой соли было произведено И.В. Курчатовым и П.П. Кобеко в 1931 – 34 г.г.

Основные свойства сегнетоэлектриков:

1. Сегнетоэлектрики имеют аномально большие значения диэлектрической проницаемости ($\epsilon \approx 10^4$).
2. Диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков является нелинейной функцией напряженности электрического поля.
3. Диэлектрическая проницаемость зависит не только от напряженности электрического поля, но и от предистория образца, т.е. его предшествующей поляризации. Другими словами наблюдается диэлектрический гистерезис.
4. Сегнетоэлектрические свойства сильно зависят от температуры. Для каждого сегнетоэлектрика имеется определенная температура выше которой его необычные свойства исчезают. Эта температура получила название точки Кюри. Как правило, сегнетоэлектрики имеют одну точку Кюри, хотя есть и исключения. Например, у сегнетовой соли две точки (-18°C , $+24^\circ\text{C}$).

Эти свойства сегнетоэлектриков объясняются тем, что в отсутствие внешнего электрического поля сегнетоэлектрики представляют собой как бы мозаику из доменов – областей с различными направлениями спонтанной (самопроизвольной) поляризованности. Так, что в целом сегнетоэлектрик не поляризован, т.е. его дипольный момент равен нулю.

При внесении сегнетоэлектрика во внешнее электрическое поле происходит переориентация дипольных моментов доменов по полю, а возникающее при этом электрическое поле доменов будет поддерживать их некоторую ориентацию и после прекращения действия внешнего поля.

6.2.3. Пьезоэффект.

Опыт показывает, что в некоторых кристаллах поляризация может возникать не только под действием электрического поля, но и под действием механических напряжений. Это явление, впервые изученное П. и Ж. Кюри, получило название пьезоэлектрического эффекта или пьезоэффекта.

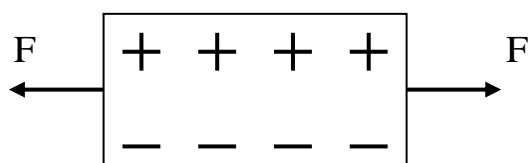


Рис. 19. К возникновению пьезоэффекта

Если из кристалла кварца вырезать определенным образом пластинку и сжимать (растягивать) ее в направлении перпендикулярном к оптической оси, то в ней возникает поляризация, и на поверхности пластинки появляются поляризационные заряды (рис. 19). Опыт показывает, что при изменении знака деформации, т.е. при переходе от растяжения к сжатию, знак поляризационных зарядов изменяется.

Величина вектора поляризации (в определенном интервале изменений) пропорциональна механическому напряжению.

Наряду с прямым пьезоэффектом, существует и обратное ему явление (обратный пьезоэффект): в пьезоэлектрических кристаллах возникновение поляризации всегда сопровождается механическими деформациями. Поэтому, если на металлические обкладки, укрепленные на кристалле, подать напряжение, то он под действием поля поляризуется и деформируется.

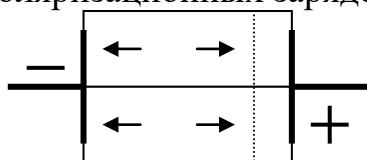


Рис. 20. Двойной пьезоэлемент работающий на сжатие.

Пользуясь этим обстоятельством можно осуществлять различные типы деформации. На рисунке 20 показан двойной пьезоэлемент (составленный из двух пластин) работающий на сжатие. Пластины вырезаны таким образом, что они одновременно сжимаются или растягиваются.

На рисунке 21 показан пьезоэлемент работающий на изгиб. При подаче напряжения на пластинки одна из них растягивается, а другая сжимается, в результате чего и воз-

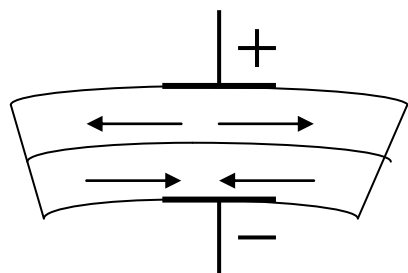


Рис. 21. Двойной пьезоэлемент работающий на изгиб.

При подаче напряжения на пластинки одна из них растягивается, а другая сжимается, в результате чего и воз-

никает деформация изгиба. Если такие пластинки сгибать внешними силами, то на пластинках появляется напряжение. Очевидно, что такой пьезоэлемент не отвечает на сжатие и растяжение, так как возникающие при этом электрические поля направлены в разные стороны и разность потенциалов равна нулю.

Тема 3.3. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

1.3.3. Равновесие зарядов на проводниках.

Свободные электрические заряды в проводнике могут перемещаться под действием сколь угодно малой силы. Поэтому равновесие зарядов в проводнике может наблюдаться только при выполнении следующих условий:

1. Напряженность электрического поля внутри проводника должна быть равна нулю, т.е.

$$\vec{E} = 0. \quad 3.1$$

В соответствии с 3.1 и 1.19. это означает, что потенциал внутри проводника остается постоянным.

2. Напряженность поля на поверхности проводника должна быть в каждой точке направлена по нормали к поверхности. Следовательно, в случае равновесия зарядов, поверхность проводника является эквипотенциальной поверхностью.

Если бы эти условия не выполнялись, то на свободные заряды, имеющиеся в каждом проводнике, действовала сила, и равновесие было бы нарушено.

Земля также является проводником, и заряды на ней находятся в равновесии. Поэтому можно считать, что все точки земли имеют одинаковый потенциал. По этой причине постоянную точку при измерении потенциала часто выбирают на поверхности земли и говорят о потенциале относительно земли.

Так как при равновесии зарядов на проводнике напряженность поля в нем равна нулю, то поток вектора напряженности через любую замкнутую поверхность, проведенную внутри проводника, равен нулю. Из теоремы Гаусса 1.9 следует, что в этом случае поверхность электрических зарядов не охватывает. Следовательно, при равновесии, внутри проводника не может быть электрических зарядов. Все они расположатся на поверхности проводника с некоторой поверхностной плотностью σ . Заряды в состоянии равновесия распределяются

по поверхности проводника всегда, независимо от того каким образом возникают эти заряды.

Так как в состоянии равновесия зарядов внутри проводника нет, то удаление вещества из некоторого объема, взятого внутри проводника, никак не отражается на распределении зарядов. Это означает, что избыточный заряд распределяется на полый проводник так же, как и на сплошном, т.е. на его наружной поверхности. На поверхности полости заряды располагаться не

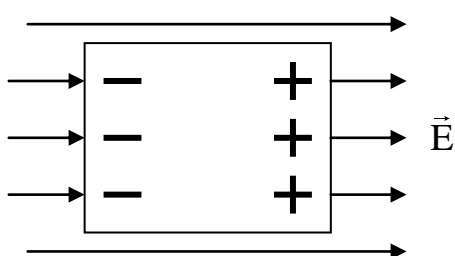


Рис. 22. Электрическое поле в проводнике.

могут. Это явление широко используется в электростатической защите и генераторе Ван-де-Граафа.

К аналогичному результату мы придем, рассматривая незаряженный проводник, помещенный во внешнее электрическое поле.

Под действием внешнего электрического поля в проводнике носители заряда приходят в движение: положительные по полю, отрицательные – против поля. В результате перемещения зарядов на поверхности проводника возникают заряды противоположных знаков (рис. 22), называемые индуцированными зарядами, а само явление – электростатической индукцией.

Ранее мы показали, что напряженность электрического поля у поверхности проводника $E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$. Поле этих зарядов направлено против внешнего поля и ослабляет его. Перемещение зарядов будет происходить до тех пор, пока напряженность поля в проводнике не станет равной нулю, а заряды при этом распределятся по поверхности проводника. Следовательно, нейтральный проводник, внесенный во внешнее электрическое поле, разрывает часть линий напряженности – они заканчиваются на отрицательном заряде и начинаются на положительном (рис. 22).

Тот факт, что заряды в проводнике распределяются только по его поверхности, является следствием закона Кулона. Поэтому, исследуя на опыте, действительно ли в объеме проводника нет электрических зарядов, можно проверить справедливость закона Кулона и притом с гораздо более высокой точностью.

Такие опыты впервые были проведены Кавендишем на 11 лет раньше Кулона, но эта работа Кавендиша была опубликована только в конце 19 века.

В этих опытах изолированный металлический шар помещался внутри металлических полусфер, которые могли быть соединены в одну сферу. В одной из полусфер было маленькое отверстие, через которое шар мог бы быть соединен со сферой.

Сам опыт заключался в следующем. Полусферы складывались вместе, соединялись проволокой с шаром и заряжались от электрофорной машины. Затем проволоку убирали, обе полусферы раздвигали и с помощью электрометра определяли заряд шара. Опыт всегда показывал, что на шаре нет никаких следов заряда.

Позднее Максвелл повторил опыты Кавендиша с более чувствительными приборами и показал, что отклонение от двойки в показателе степени закон Кулона если и существует, то не превышает значения 0,00005.

Распределение зарядов по поверхности проводника зависит от его формы. Опыт показывает, что поверхностная плотность зарядов различна в различных точках поверхности проводника: она близка к нулю в углублениях и максимальна вблизи острия.

Но напряженность электрического поля пропорциональна поверхностной плотности заряда σ . Поэтому напряженность поля у поверхности проводника сложной формы также весьма неодинакова. Она особенно велика возле участ-

ков с малым радиусом кривизны, т.е. у заострений. Это приводит к своеобразному явлению «стекания» зарядов с металлического острия.

2.3.3. Электроемкость. Конденсаторы.

Опыт показывает, что независимо от способа электризации тела, его заряд всегда пропорционален потенциалу, т.е.

$$q = C \cdot \varphi. \quad 3.2$$

Коэффициент пропорциональности между зарядом тела и его потенциалом называется электроемкостью (или просто емкостью) проводника.

Из 3.2 следует, что

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad [C] = 1 \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = 1 \text{ Фарад}. \quad 3.3$$

Для уединенной сферы потенциал определяется по формуле 1.17, и тогда для емкости сферы получим выражение

$$C = 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot R. \quad 3.4$$

Из 3.4 следует, что емкость уединенного проводника зависит от его геометрических размеров, а также диэлектрических свойств среды.

Уединенные проводники обладают малой емкостью и поэтому не могут накапливать большой заряд. На практике нам необходимы устройства способные при малых размерах и сравнительно низких потенциалах накапливать значительные заряды.

Конденсатором называются два проводника, разделенных слоем диэлектрика, толщина которого во много раз меньше размеров проводника.

Чтобы внешние тела не влияли на емкость конденсатора, проводникам придают такую форму, что электрическое поле было сосредоточено только между проводниками. Этому условию удовлетворяют: две пластины, расположенные на небольшом расстоянии друг к другу, два коаксиальных цилиндра, две концентрические сферы.

Поскольку электрическое поле сосредоточено внутри конденсатора, то линии напряженности начинаются на одной обкладке и заканчиваются на другой. Следовательно, заряды обкладок равны по величине и противоположны по знаку.

Под **емкостью конденсатора понимается величина равная отношению заряда одной из обкладок к разности потенциалов между ними.**

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi}. \quad 3.5$$

Величина емкости конденсатора определяется его геометрическими размерами, а также диэлектрическими свойствами среды, заполняющей конденсатор.

Примеры расчета емкости конденсатора.

Плоский конденсатор. Если на плоские пластины подать равные по величине и противоположные по знаку заряды, то напряженность электрического поля между пластинами, согласно 1.12, будет определяться по формуле

$E = \frac{q}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot S}$. Если расстояние между пластинами равно d , то разность потенциалов между ними будет равна $\Delta\varphi = E \cdot d = \frac{q \cdot d}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot S}$. Подставляя найденное выражение в формулу 3.5 емкости конденсатора получим

$$C = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{d}.$$

Цилиндрический конденсатор. Если на обкладках конденсатора имеется электрический заряд q , то напряженность электрического поля между обкладками определяется по формуле $E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{\varepsilon \cdot r}$ и тогда для разности потенциалов между ними можно получить $\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau \cdot dr}{\varepsilon \cdot r} = \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$. И для емкости сферического конденсатора получим

$$C = \frac{2\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \ell}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Если расстояние между пластинами $d = R_2 - R_1$ значительно меньше радиусов цилиндров, то

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \frac{R_1 + d}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{d}{R_1} \right) = \frac{d}{R_1}$$

и тогда для емкости цилиндрического конденсатора получим

$$C = \frac{2\pi \cdot \ell \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot R_1}{d} = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{d}.$$

Аналогичное выражение можно получить и для сферического конденсатора. Из полученных выражений следует, что емкость конденсатора определяется геометрическими размерами конденсатора и диэлектрическими свойствами среды, заполняющей конденсатор.

Отметим, что полученный результат является общим и для конденсаторов с обкладками любой формы, если только зазор между ними мал по сравнению с радиусами кривизны обкладок.

3.3.3. Энергия взаимодействия точечных зарядов. Энергия заряженных проводников.

Ранее мы показали, что электрический заряд, находящийся в электрическом поле, обладает энергией, которую можно найти по формуле 1.18. Поэтому энергия системы двух точечных зарядов q_1 и q_2 , расположенных на расстоянии

г друг от друга может быть определена следующим образом. Пусть заряд q_1 находится в электрическом поле, создаваемым вторым зарядом. Тогда

$$W_1 = q_1 \cdot \varphi_{21} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r}. \quad 3.6$$

Очевидно, справедливо и обратное утверждение: заряд q_2 в поле первого заряда будет обладать энергией

$$W_2 = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r}. \quad 3.7$$

Из 3.6 и 3.7 следует, что $W_1 = W_2 = W$, и общую энергию системы двух точечных зарядов можно записать в виде:

$$W = \frac{1}{2} W_1 + \frac{1}{2} W_2 = \frac{1}{2} (q_1 \cdot \varphi_{21} + q_2 \cdot \varphi_{12}). \quad 3.8$$

Для системы состоящей из N точечных зарядов выражение 3.8 запишется в виде:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_{ki}, \quad 3.9$$

где $i \neq k$.

Заряд q , находящийся на некотором проводнике, можно рассматривать, как систему точечных зарядов dq . Поэтому заряженный проводник будет обладать энергией. Найдем величину этой энергии.

Пусть заряд проводника равен q , его емкость C , а потенциал φ . Для увеличения заряда тела на величину dq нужно совершить работу $dA = \varphi \cdot dq$. Дифференцируя выражение 3.2 получим $dq = C \cdot d\varphi$ и тогда $dA = C \cdot \varphi \cdot d\varphi$. Интегрируя полученное выражение найдем, что

$$A = \frac{C\varphi^2}{2} + \text{const}. \quad 3.10$$

Естественно считать энергию незаряженного проводника равной нулю, тогда постоянная интегрирования будет равна нулю, и для энергии заряженного проводника получим выражение

$$W = \frac{C \cdot \varphi^2}{2} = \frac{q \cdot \varphi}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad 3.11$$

Как и всякий заряженный проводник, конденсатор обладает энергией

$$W = \frac{C \cdot \Delta\varphi^2}{2}. \quad 3.12$$

В случае плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{d}$, $\Delta\varphi = E \cdot d$ и тогда выражение 3.12 примет вид

$$W = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{2d} \cdot E^2 \cdot d^2 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{2} \cdot d \cdot E^2. \quad 3.13$$

Введем величину

$$w = \frac{W}{V}, \quad 3.14$$

которую будем называть **объемной плотностью энергии**. Тогда для электрического поля в конденсаторе получим, что

$$w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2}. \quad 3.15$$

С учетом того, что $D = \epsilon\epsilon_0 E$ выражение 3.15 примет вид

$$w = \frac{ED}{2}. \quad 3.16$$

Тот факт, что объемная плотность энергии выражается через характеристики электрического поля (\vec{E} и \vec{D}), говорит о том, что само поле обладает энергией.

Электростатика

Примеры решения задач

Задача 1. Два положительных точечных заряда Q и $4Q$ закреплены на расстоянии $0,6$ м друг от друга. Определить в какой точке на прямой, проходящей через заряды, следует поместить третий заряд так, чтобы он находился в равновесии.

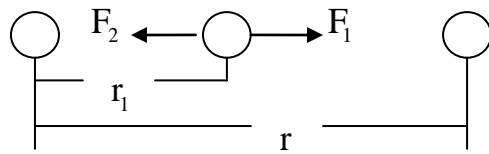
Дано:

Q

$4Q$

$r = 0,6$ м

$r_1 - ?$



Третий заряд будет находиться в равновесии, если геометрическая сумма сил, действующих на него, будет

равна нулю, т.е. $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ или $F_1 = F_2$.

По закону Кулона $F_1 = k \frac{q \cdot Q}{r_1^2}$, $F_2 = k \frac{4q \cdot Q}{(r - r_1)^2}$. Тогда

$$k \frac{qQ}{r_1^2} = k \frac{4qQ}{(r - r_1)^2} \Rightarrow r^2 - 2r \cdot r_1 + r_1^2 = 4r_1^2. \quad \text{Подставляя численные значения,}$$

получим квадратное уравнение $r_1^2 + 0,4 \cdot r_1 - 0,12 = 0$. Решая полученное уравнение относительно r_1 , получим $r_1 = 0,2$ м, $r_2 = -0,6$ м. Второе решение не удовлетворяет физическому условию задачи (докажите) и должно быть отброшено. Следовательно, третий заряд должен быть помещен на расстоянии $0,2$ м от первого заряда.

Ответ: $r_1 = 0,2$ м.

Задача 2. Тонкий стержень длиной $0,1$ м равномерно заряжен с линейной плотностью заряда 1 мкКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии $0,2$ м

от ближайшего его конца находится точечный заряд 10^{-7} Кл. Определить силу, действующую на точечный заряд со стороны стержня.

Дано:

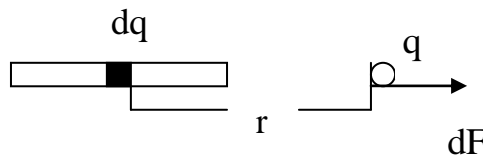
$$\ell = 0,1 \text{ м}$$

$$b = 0,2 \text{ м}$$

$$\tau = 10^{-6} \text{ Кл/м}$$

$$q = 10^{-7} \text{ Кл}$$

$$F = ?$$



В данном случае заряд на стержне нельзя считать точным и, поэтому, нельзя применять закон Кулона.

Выделим на стержне участок длиной dr , несущий заряд $dq = \tau \cdot dr$, который можно считать точечным. По закону

Кулона $dF = k \frac{q \cdot \tau \cdot dr}{r^2}$. Тогда результирующая сила

$\vec{F} = \sum d\vec{F}$. Так как все силы, действующие со стороны элементов стержня на точечный заряд, направлены в одну сторону, то геометрическое сложение можно

заменить алгебраическим и, поэтому, $F = \int_b^{\ell+b} k \frac{q \cdot \tau \cdot dr}{r^2} = k \cdot \tau \cdot q \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\ell + b} \right)$.

$$\text{Вычисляя, найдем } F = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-6} \cdot \frac{0,1}{0,2 \cdot 0,3} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ (Н)}.$$

Ответ: $F = 1,5 \cdot 10^{-3}$ Н.

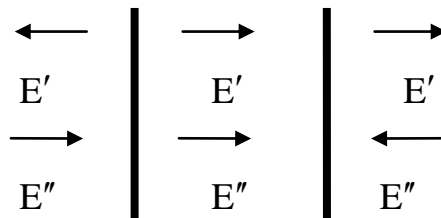
Задача 3. Электрическое поле создается двумя пластинами, равномерно заряженными с поверхностной плотностью заряда 4 мкКл/м^2 и -6 мкКл/м^2 . Определить напряженность электрического поля, создаваемого пластинами.

Дано:

$$\sigma_1 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2$$

$$\sigma_2 = -6 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2$$

$$E = ?$$



Напряженность электрического поля создаваемого заряженной плоскостью определяется по формуле $E = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0}$. Плос-

кости делят пространство на три области. Как видно из рисунка в первой и третьей области напряженности электрических полей, создаваемых каждой пла-

стиной, направлены в разные стороны и, поэтому, $E_1 = E_3 = E'' - E' = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2 \cdot \epsilon_0}$.

Между пластинами они направлены в одну сторону и, поэтому, $E_2 = \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2 \cdot \epsilon_0}$.

$$\text{Вычисляя, получим } E_1 = E_3 = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 11,3 \cdot 10^4 \text{ (В/м)},$$

$$E_2 = \frac{10 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 56,5 \cdot 10^4 \text{ (В/м)}.$$

Ответ: $E_1 = E_3 = 113 \text{ кВ/м}$, $E_2 = 565 \text{ кВ/м}$.

Задача 4. Три точечных заряда по 10^{-6} Кл расположены на одной прямой, на расстоянии 20 см друг от друга. Какую работу надо совершить, чтобы расположить эти заряды в вершинах равностороннего треугольника со стороной 20 см?

Дано:

$$q = 10^{-6} \text{ Кл}$$

$$r = 0,2 \text{ м}$$

$$A = ?$$

Работа, совершаемая при перемещении зарядов, может быть найдена как изменение энергии системы. Потенциальная энергия системы зарядов определяется по формуле $W = \frac{1}{2} \sum q_i \cdot \varphi_{ki}$. Так как потенциал поля точечного заряда

определяется по формуле $\varphi = k \frac{q}{r}$, то в исходном состоянии система

будет обладать энергией

$$W_1 = \frac{1}{2} \left(k \frac{q^2}{r} + k \frac{q^2}{2r} + k \frac{q^2}{r} + k \frac{q^2}{r} + k \frac{q^2}{2r} + k \frac{q^2}{r} \right) = \frac{5k \cdot q^2}{2r}, \text{ а в конечном состоянии}$$

энергия будет равна $W_2 = 3 \cdot k \cdot \frac{q^2}{r}$. Значит $A = W_2 - W_1 = \frac{6k \cdot q^2}{2r} - \frac{5kq^2}{2r} = \frac{kq^2}{2r}$.

Подставляя

численные

значения,

найдем

$$A = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 0,2} = 22,5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 22,5 \text{ мДж}.$$

Ответ: $A = 22,5 \text{ мДж}$.

Задача 5. Электрическое поле бесконечно длинным цилиндром радиуса 5 мм, равномерно заряженным с линейной плотностью заряда 12 нКл/м. Определить разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими на расстоянии 1 и 2,5 см от поверхности этого цилиндра.

Дано:

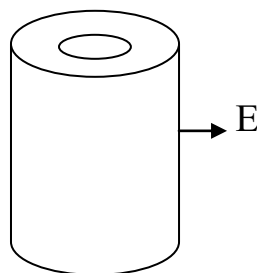
$$r = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\tau = 12 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}$$

$$a = 10^{-2} \text{ м}$$

$$b = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$\Delta\varphi = ?$$



выражение

необходимо проинтегрировать, т.е.

$$\Delta\varphi = \int_1^2 E \cdot dR. \text{ Для того, чтобы найти этот интеграл надо}$$

знать зависимость напряженности электрического поля от расстояния. Для

нахождения этой зависимости воспользуемся теоремой Гаусса $\oint_S E \cdot dS = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$.

Взяв в качестве замкнутой поверхности цилиндрическую поверхность коаксиальную с заданным цилиндром можно получить $E \cdot 2\pi \cdot R \cdot \ell = \frac{\tau \cdot \ell}{\epsilon_0} \Rightarrow$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{R} \text{ и тогда } \Delta\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{r+a}^{r+b} \frac{dR}{R} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r+b}{r+a}.$$

Вычисляя, получим $\Delta\varphi = \frac{12 \cdot 10^{-9}}{6,28 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{3}{1,5} = 150 \text{ В}.$

Ответ: $\Delta\varphi = 150 \text{ В}.$

Задача 6. Пылинка массой 10^{-15} кг , несущая заряд $8 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$, прошла в вакууме ускоряющую разность потенциалов 600 кВ . Какую скорость приобретает пылинка, если ее начальная скорость равна нулю?

Дано: $q = 8 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
 $m = 10^{-15} \text{ кг}$
 $U = 6 \cdot 10^5 \text{ В}$
 $v - ?$

Электрическое поле совершает работу равную $A = q \cdot U$. Эта работа идет на изменение кинетической энергии пылинки $A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$. Так как $v_0 = 0$, то $A = \frac{mv^2}{2}$ и тогда $qU = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$.

Вычисляя, найдем $v = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-19} \cdot 6 \cdot 10^5}{10^{-15}}} = 31 \text{ (м/с)}.$

Ответ: $v = 31 \text{ м/с}.$

Задача 7. Конденсатор емкостью $0,6 \text{ мкФ}$, заряженный до 600 В , соединяют параллельно с конденсатором емкостью $0,4 \text{ мкФ}$ заряженным до 150 В . Какое напряжение установится на батарее конденсаторов? Какая энергия выделится при образовании искры?

Дано: $C_1 = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$
 $C_2 = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$
 $U_1 = 600 \text{ В}$
 $U_2 = 150 \text{ В}$
 $U - ?$

Общая емкость двух параллельно соединенных конденсаторов $C = C_1 + C_2$, а общий заряд батареи $q = q_1 + q_2 = C_1 \cdot U_1 + C_2 \cdot U_2$. Тогда $U = \frac{q}{C} = \frac{C_1 \cdot U_1 + C_2 \cdot U_2}{C_1 + C_2}$.

Энергия заряженного конденсатора определяется по формуле $W = \frac{CU^2}{2}$ и тогда, до соединения энергия системы была равна $W_1 = \frac{C_1 \cdot U_1^2 + C_2 \cdot U_2^2}{2}$. После соединения конденсаторов энер-

гия батареи будет равна $W_2 = \frac{(C_1 + C_2) \cdot U^2}{2}$, следовательно,

$$\Delta W = \frac{C_1 \cdot U_1^2 + C_2 \cdot U_2^2 - (C_1 + C_2) \cdot U^2}{2}. \quad \text{Вычисляя,} \quad \text{получим}$$

$$U = \frac{10^{-6} (180 + 60)}{10^{-6}} = 240 \text{ В},$$

$$\Delta W = \frac{10^{-6} \cdot 10^4 \cdot (5,4 + 1 - 5,76)}{2} = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 4,2 \text{ мДж}.$$

Ответ: $U = 240 \text{ В}$, $\Delta W = 4,2 \text{ мДж}$.

Задача 8. Два плоских воздушных конденсатора одинаковой емкостью соединены параллельно в батарею и заряжены до 400 В. Какое напряжение установится на батарее, если один из конденсаторов заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью равной 7?

Дано: Пусть емкость одного конденсатора равна C_0 . Тогда в исходном состоянии емкость батареи будет равна $C_1 = 2C_0$, а ее заряд $q_1 = C_1 \cdot U_1 = 2C_0 \cdot U_1$.

$U_1 = 400 \text{ В}$
 $\varepsilon = 7$
 $U_2 = ?$

После того как в один из конденсаторов вставили диэлектрик, его емкость увеличилась в ε раз и емкость батареи будет равна $C_2 = (1 + \varepsilon) \cdot C_0$, заряд батареи - $q_2 = (1 + \varepsilon) \cdot C_0 \cdot U_2$. Так как заряд батареи при этом не изменяется, т.е. $q_1 = q_2$, то $2C_0 \cdot U_1 = (1 + \varepsilon) \cdot C_0 \cdot U_2 \Rightarrow$

$$U_2 = \frac{2 \cdot U_1}{1 + \varepsilon}.$$

Вычисляя, найдем $U_2 = \frac{2 \cdot 400}{8} = 100 \text{ В}$.

Ответ: $U_2 = 100 \text{ В}$.

Зачетная работа
Таблица вариантов

Ва-ри-ант	Номера задач
1.	1, 22, 29, 53, 56, 77, 84, 97, 105, 127, 133, 149, 160, 189, 190, 210, 213, 235
2.	2, 29, 30, 54, 57, 83, 85, 98, 106, 132, 134, 159, 161, 188, 191, 212, 214, 241
3.	3, 28, 31, 55, 58, 82, 86, 99, 107, 131, 135, 158, 162, 187, 192, 211, 215, 240
4.	4, 27, 32, 54, 59, 81, 87, 104, 108, 130, 136, 157, 163, 186, 194, 210, 216, 239
5.	5, 26, 33, 53, 60, 80, 88, 103, 109, 129, 137, 156, 164, 185, 195, 209, 217, 238
6.	6, 25, 34, 52, 61, 79, 89, 102, 110, 128, 138, 155, 165, 184, 196, 208, 218, 237
7.	7, 24, 35, 51, 62, 78, 90, 101, 111, 127, 139, 154, 166, 183, 197, 207, 219, 236
8.	8, 23, 36, 50, 63, 77, 91, 100, 112, 126, 140, 153, 167, 182, 198, 206, 220, 235
9.	9, 22, 37, 49, 64, 76, 92, 99, 113, 125, 141, 152, 168, 181, 197, 205, 221, 234
10.	10, 21, 38, 48, 65, 75, 91, 98, 114, 124, 142, 151, 169, 180, 196, 204, 222, 233
11.	11, 20, 39, 47, 66, 74, 90, 97, 115, 123, 143, 150, 170, 179, 195, 203, 223, 232
12.	12, 19, 40, 46, 67, 73, 89, 96, 116, 122, 144, 149, 171, 178, 194, 202, 224, 231
13.	13, 18, 41, 45, 68, 72, 88, 95, 117, 121, 145, 148, 172, 177, 193, 201, 225, 230
14.	14, 17, 42, 44, 69, 71, 87, 94, 118, 120, 140, 147, 173, 176, 192, 200, 226, 229
15.	15, 16, 40, 43, 62, 70, 86, 93, 115, 119, 135, 146, 174, 175, 191, 199, 222, 228

1. Два шарика массой 0,1 г каждый подвешены в одной точке на нитях длиной 20 см каждая. Получив одинаковый заряд, шарики разошлись так, что нити образовали угол 60° . Найти заряд каждого шарика.

2. Два одинаковых заряженных шарика подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины. При этом нити разошлись на угол α . Шарики погружаются в масло плотностью $800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Определить диэлектрическую проницаемость масла, если угол расхождения нитей при погружении их в масло остается неизменным. Плотность материала шариков $1600 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

3. Два положительных заряда 1 мкКл и 4 мкКл закреплены на расстоянии 60 см друг от друга. Определить, в какой точке на прямой, проходящей через заряды, следует поместить третий заряд так, чтобы он находился в равновесии?

4. Расстояние между двумя точечными зарядами по 1 мкКл каждый равно 10 см. Определить силу, действующую на точечный заряд 0,1 мкКл, удаленный на 6 см от первого и на 8 см от второго заряда.

5. Расстояние между свободными зарядами 180 нКл и 720 нКл равно 60 см. Определить точку на прямой, проходящей через заряды, в которой нужно поместить третий заряд так, чтобы система зарядов находилась в равновесии? Определить величину и знак третьего заряда.

6. В вершинах квадрата находятся одинаковые заряды 0,3 нКл. Какой отрицательный заряд нужно поместить в центре квадрата, чтобы система зарядов находилась в равновесии?

7. Тонкий стержень длиной 10 см равномерно заряжен с линейной плотностью заряда $1 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}}$. На продолжении оси стержня на расстоянии 20 см от бли-

жайшего его конца находится точечный заряд 100 нКл. Определить силу взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

8. Тонкая нить длиной 20 см равномерно заряжена с линейной плотностью $10 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}}$. На расстоянии 10 см от нити, против ее середины, находится точечный заряд 1 нКл. Вычислить силу, действующую на этот заряд со стороны заряженной нити.

9. На отрезке тонкого прямого проводника длиной 10 см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $3 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}}$. Вычислить напряженность, создаваемую этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца отрезка на расстояние, равное длине этого проводника.

10. Тонкая нить длиной 20 см равномерно заряжена с линейной плотностью $10 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}}$. На перпендикуляре, проходящем через один из концов нити, на расстоянии 20 см от нити, находится точечный заряд 2 нКл. Определить силу взаимодействия нити и точечного заряда.

11. В вершинах равностороннего треугольника находятся заряды по 1 нКл. Какой отрицательный заряд надо поместить в центре треугольника, чтобы система зарядов находилась в равновесии?

12. Тонкое кольцо радиусом 10 см несет равномерно распределенный заряд 0,1 мкКл. На перпендикуляре к плоскости кольца, восстановленном из его середины, находится точечный заряд 10 нКл. Определить силу, действующую на точечный заряд со стороны заряженного кольца, если он удален от центра кольца на: 1) 20 см; 2) 2 м.

13. На продолжении оси тонкого прямого стержня, равномерно заряженного с линейной плотностью заряда $200 \frac{\text{нКл}}{\text{м}}$, на расстоянии 40 см от конца стержня находится точечный заряд 15 нКл. Второй конец стержня уходит в бесконечность. Определить силу взаимодействия стержня и заряда.

14. Три точечных заряда, попарно помещаемые на расстоянии 10 см друг от друга, взаимодействуют с силами 5, 8, 12 Н. Найти величину зарядов.

15. Два точечных заряда находятся на некотором расстоянии друг от друга. Если расстояние между зарядами уменьшить на 50 см, то сила взаимодействия увеличивается в два раза. Найти это расстояние.

16. По тонкой нити, изогнутой по дуге окружности радиусом 10 см, равномерно распределен заряд 20 нКл. Определить напряженность электрического поля, создаваемого этим зарядом в точке, совпадающей с центром кривизны дуги, если длина нити равна четверти окружности.

17. Тонкое кольцо радиусом 8 см несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью $10 \frac{\text{нКл}}{\text{м}}$. Какова напряженность электрического поля в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние 10 см?

18. На металлической сфере радиусом 10 см находится заряд 1 нКл. Определить напряженность электрического поля в следующих точках: 1) на расстоянии 8 см от центра сферы; 2) на ее поверхности; 3) на расстоянии 15 см от центра сферы. Построить график зависимости $E = f(r)$.

19. Две концентрические металлические сферы радиусами 6 и 10 см несут соответственно заряды 1 нКл и - 0,5 нКл. Найти напряженность электрического поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях: 5 см, 9 см, 15 см. Построить график зависимости $E = f(r)$.

20. Очень длинная тонкая прямая проволока несет заряд, равномерно распределенный по всей ее длине. Вычислить линейную плотность заряда, если напряженность поля на расстоянии 0,5 м от проволоки против ее середины равна 200 В/м.

21. Прямой металлический стержень диаметром 5 см и длиной 4 м несет равномерно распределенный по его поверхности заряд 500 нКл. Определить напряженность поля в точке, находящейся против середины стержня на расстоянии 1 см от него.

22. Тонкий стержень длиной 10 см заряжен с линейной плотностью $400 \frac{\text{нКл}}{\text{м}}$. Найти напряженность поля в точке, расположенной на перпендикуляре к стержню, проведенном через один из его концов, на расстоянии 8 см от этого конца.

23. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими равномерно распределенный по площади заряд с поверхностными плотностями $2 \frac{\text{нКл}}{\text{м}^2}$ и $-5 \frac{\text{нКл}}{\text{м}^2}$. Определить напряженность поля: между пластинами; вне пластин. Построить график изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной пластинам.

24. По тонкой нити, изогнутой по дуге окружности радиусом 10 см, равномерно распределен заряд 20 нКл. Определить напряженность электрического поля, создаваемого этим зарядом в точке, совпадающей с центром кривизны дуги, если длина нити равна одной трети окружности.

25. На бесконечном тонкостенном цилиндре диаметром 20 см равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью $4 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$. Определить напряженность поля в точке, отстоящей от поверхности цилиндра на 15 см.

26. По тонкому полукольцу равномерно распределен заряд 20 мкКл с линейной плотностью $0,1 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}}$. Определить напряженность поля, создаваемого этим зарядом в точке совпадающей с центром полукольца.

27. Треть тонкого кольца радиуса 10 см несет равномерно распределенный заряд 50 нКл. Определить напряженность электрического поля, создаваемого этим зарядом в точке, совпадающей с центром кольца.

28. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими равномерно распределенный по площади заряд с поверхностными плотностями $1 \frac{\text{нКл}}{\text{м}^2}$ и $3 \frac{\text{нКл}}{\text{м}^2}$. Определить напряженность поля: между пластинами; вне пластин. Построить график изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной пластинам.

29. Тонкий стержень длиной 10 см несет равномерно распределенный заряд 1 нКл. Определить потенциал электрического поля в точке, лежащей на оси стержня на расстоянии 20 см от ближайшего его конца.

30. По тонкому кольцу радиусом 10 см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $10 \frac{\text{нКл}}{\text{м}}$. Определить потенциал в точке, лежащей на оси кольца, на расстоянии 5 см от центра.

31. Заряды 40 и 50 нКл расположены на расстоянии 0,5 м друг от друга. Какую работу необходимо совершить, чтобы сблизить эти заряды до расстояния 0,2 м?

32. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы, двигаясь из состояния покоя приобрести скорость 8 Мм/с?

33. Бесконечно длинная тонкая прямая нить несет равномерно распределенный по длине нити заряд с линейной плотностью $0,01 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}}$. Определить разность потенциалов двух точек поля, удаленных от нити на 2 и 4 см.

34. Заряд равномерно распределен по бесконечной плоскости с поверхностной плотностью $10 \frac{\text{нКл}}{\text{м}^2}$. Определить разность потенциалов двух точек поля, одна из которых лежит на плоскости, а другая отстоит от нее на 20 см.

35. На отрезке тонкого прямого проводника равномерно распределен заряд с линейной плотностью $10 \frac{\text{нКл}}{\text{м}}$. Определить потенциал поля в точке, лежащей на оси проводника и удаленной от ближайшего конца проводника на расстояние равное его длине.

36. Тонкий стержень длиной 10 см несет равномерно распределенный заряд 1 нКл. Определить потенциал электрического поля в точке, удаленной от ближайшего конца стержня на 20 см.

37. Определить потенциал шара, если известно, что на расстоянии 10 см от его поверхности потенциал электрического поля равен 20 В. Радиус шара 10 см.

38. Между электродами лампы напряжение равно 200 В. Определить конечную скорость электрона, если начальная скорость его равна нулю.

39. Электрон движется по направлению силовых линий однородного поля, напряженность которого равна $1,2 \frac{\text{В}}{\text{см}}$. Какое расстояние он пролетит в вакууме до полной остановки, если его начальная скорость равна 1000 км/с ?

40. Определить ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, обладающий скоростью 1 Мм/с , чтобы его скорость увеличилась в 2 раза?

41. Электрон с начальной скоростью 3 Мм/с влетел в однородное электрическое поле с напряженностью 150 В/м . Определить скорость электрона через $0,1 \text{ мкс}$, если электрон движется по направлению силовых линий.

42. С поверхности металлического шара, несущего на себе заряд 200 нКл , вылетает электрон. В бесконечности скорость этого электрона оказалась равной 3 Мм/с . С какой скоростью электрон покинул шар?

43. Определить потенциальную энергию системы четырех точечных зарядов по 20 мкКл , расположенных в вершинах квадрата со стороной 10 см . Заряды одинаковы по модулю, но один из них отрицательный.

44. Четыре точечных заряда по 100 мкКл расположены в вершинах ромба со стороной 10 см и острым углом 60° . Определить потенциальную энергию системы зарядов, если два заряда отрицательные и расположены в противоположных вершинах ромба.

45. В вершинах правильного шестиугольника расположены заряды по 40 нКл . Определить потенциальную энергию системы, если сторона шестиугольника равна 20 см .

46. Найти потенциальную энергию системы трех точечных зарядов 10 нКл , 20 нКл , -30 нКл , расположенных в вершинах равностороннего треугольника со стороной 10 см .

47. Четыре точечных заряда по 100 мкКл расположены в вершинах ромба со стороной 10 см и острым углом 60° . Определить потенциальную энергию системы зарядов.

48. В вершинах равностороннего треугольника со стороной 20 см находятся заряды по 30 мкКл . В центре треугольника расположен отрицательный заряд 6 мкКл . Определить потенциальную энергию системы.

49. Система состоит из трех зарядов - двух положительных по 1 мкКл и одного отрицательного 200 нКл расположенного посередине между положительными зарядами. Определить изменение потенциальной энергии системы, если отрицательный и один из положительных зарядов поменять местами.

50. Два точечных заряда 6 и -9 мкКл расположены на расстоянии 10 см друг от друга. Найти изменение потенциальной энергии зарядов при изменении расстояния между ними до 60 см . Какая работа будет совершена при этом?

51. В вершинах правильного шестиугольника со стороной 3 см расположены три положительных и три отрицательных заряда по 10 нКл . Определить потенциальную энергию системы зарядов, если в соседних вершинах располагаются заряды противоположных знаков.

52. Найти потенциальную энергию системы трех точечных зарядов 10 нКл , 10 нКл , -10 нКл , расположенных в вершинах равностороннего треугольника со стороной 10 см .

53. Определить изменение потенциальной энергии системы двух точечных зарядов 20 и 50 мкКл при изменении расстояния между ними от 20 см до 60 см . Какая работа совершается при этом?

54. Какова потенциальная энергия системы четырех одинаковых точечных зарядов 10 нКл , расположенных в вершинах квадрата со стороной 10 см ?

55. Определить потенциальную энергию системы четырех точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной 10 см . Заряды одинаковы по модулю, но два из них отрицательны. Заряды одного знака расположены в двух соседних вершинах.

56. Восемь заряженных водяных капель, радиусом 1 мм и зарядом 10 нКл каждая, сливаются в одну каплю. Найти потенциал большой капли.

57. Плоский воздушный конденсатор, расстояние между пластинами которого 2 см , заряжен до 3000 В и отключен от источника напряжения. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить расстояние между пластинами до 5 см ?

58. Между пластинами плоского конденсатора, находящимися на расстоянии 5 мм друг от друга, приложена разность потенциалов 150 В . К одной из пластин прилежит плоскопараллельная пластина фарфора ($\epsilon = 6$) толщиной 3 мм . Найти напряженность поля в воздухе и фарфоре.

59. Площадь пластин плоского конденсатора 100 см^2 и расстояние между ними 5 мм . К пластинам приложена разность потенциалов 300 В . Какую работу надо совершить, чтобы удалить из конденсатора диэлектрик ($\epsilon = 2,6$)? Какова будет разность потенциалов между пластинами после заполнения?

60. Два плоских конденсатора емкостью по 3 мкФ каждый заряжены до напряжения 60 В и соединены параллельно. В одном из конденсаторов расстояние между пластинами увеличили в 3 раза. Определить заряд каждого конденсатора и напряжение на них.

61. Два конденсатора емкостью 2 мкФ и 5 мкФ заряжены до напряжения 100 и 150 В соответственно. Какое количество энергии выделится на образование искры при соединении конденсаторов.

62. Плоский конденсатор с площадью пластин 200 см^2 каждая, заряжен до напряжения 2 кВ . Расстояние между пластинами 2 см . Диэлектрик стекло ($\epsilon = 7$). Определить энергия поля конденсатора и объемную плотность энергии.

63. Плоский конденсатор имеет емкость C . Какую емкость будет иметь этот конденсатор, если его наполовину заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью равной ϵ ?

64. Шесть одинаковых капелек ртути заряжены до 10 В . Каков будет потенциал большой капли, получившейся в результате слияния этих капелек?

65. К батарее с напряжением 300 В подключили два конденсатора с емкостями 4 и 3 пФ . Определить заряд и напряжение на каждом конденсаторе при последовательном и параллельном соединении этих конденсаторов.

66. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора 100 см^2 и расстояние между ними 5 мм . К пластинам приложена разность потенциалов 300 В . После отключения конденсатора от источника тока пространство между пластинами заполняется эбонитом ($\epsilon = 2,6$). Какова будет разность потенциалов между пластинами после заполнения?

67. Сила притяжения между пластинами плоского воздушного конденсатора равна 50 мН , Площадь каждой пластины 200 см^2 . Найти объемную плотность энергии электрического поля конденсатора.

68. Плоский конденсатор заряжен до напряжения 1000 В . Расстояние между пластинами 1 см . Диэлектрик - стекло ($\epsilon = 7$). Определить объемную плотность энергии поля конденсатора.

69. Плоский конденсатор имеет площадь пластин 2000 см^2 , расстояние между ними $0,5 \text{ мм}$. В конденсаторе находится пластинка слюды ($\epsilon = 7$) толщиной $0,3 \text{ мм}$, остальное - воздух. Определить емкость конденсатора.

Тема 4.3. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1.4.3. Электрический ток. Необходимые условия существования тока.

Электрическим током называется любое упорядоченное движение электрических зарядов. Если в проводнике создать электрическое поле, то в нем свободные электрические заряды придут в движение – возникает ток, называемый током проводимости. Если в пространстве перемещается заряженное тело, то ток называется конвекционным. За направление тока принимается направление движения положительно заряженных частиц.

Для возникновения и существования тока необходимо с одной стороны, наличие свободных заряженных частиц, а с другой – наличие электрического поля в проводнике. Количественной характеристикой служит величина I называемая *силой тока и определяемая зарядом, протекающим через поперечное сечение проводника в единицу времени*,

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad 4.1$$

Сила тока величина скалярная, измеряется в амперах.

Электрический ток может быть распределен по поверхности, сквозь которую он протекает, неравномерно. Более детально ток можно характеризовать с помощью *вектора плотности тока* \vec{j} . Он численно равен силе тока, протекающей через единичную площадку, перпендикулярную к направлению движения зарядов

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS}. \quad 4.2$$

Зная вектор плотности тока в каждой точке поверхности можно найти силу тока через эту поверхность

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad 4.3$$

Пусть заряд свободной частицы равен q_0 , концентрация свободных зарядов равна n , скорость их упорядоченного движения \vec{v} . Тогда за время dt через поперечное сечение проводника будет переноситься заряд $dq = q_0 \cdot n \cdot v \cdot S \cdot dt$. Учитывая 4.1 и 4.2, для плотности тока получим выражение:

$$\vec{j} = q_0 \cdot n \cdot \vec{v}. \quad 4.4$$

Так как скорость \vec{v} является вектором, то и плотность тока также будет вектором.

2.4.3. Закон Ома для участка цепи. Дифференциальная форма закона Ома.

Г. Ом на опыте установил, что сила тока в однородном проводнике прямо пропорциональна приложенному напряжению и обратно пропорциональна его сопротивлению

$$I = \frac{U}{R}. \quad 4.5$$

Величина R называется *электрическим сопротивлением проводника и зависит от его геометрических размеров, свойств материала, из которого он изготовлен и температуры*

$$R = \rho \frac{\ell}{S}, \quad 4.6$$

где ρ - удельное сопротивление, величина численно равная сопротивлению куба вещества с ребром 1 м, при условии, что ток течет в направлении перпендикулярном граням куба.

Закон Ома можно записать в дифференциальной форме. Рассмотрим цилиндрический проводник длиной $d\ell$ и площадью поперечного сечения dS . Напряжение приложенное к проводнику $U = E \cdot d\ell$, где E – напряженность поля в проводнике. Наконец, сопротивление проводника по 4.6 равно $R = \rho \frac{d\ell}{dS}$. Подставляя эти значения в 4.5, получим

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{E}}{\rho}. \quad 4.7$$

Носители заряда движутся в направлении вектора \mathbf{E} и поэтому направление векторов \vec{j} и \vec{E} совпадают. Таким образом, окончательно, можно получить:

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}, \quad 4.8$$

где $\gamma = \frac{1}{\rho}$ - удельная проводимость вещества.

Формула 4.8 выражает закон Ома в дифференциальной форме.

3.4.3. Источники тока. Сторонние силы. ЭДС источника тока.

Если два разноименно заряженных тела соединить проводником, то в нем возникает электрический ток. Возникновение тока приводит к тому, что поле очень быстро исчезает и, следовательно, ток прекращается. Для того, чтобы поддерживать ток достаточно длительное время нужно от тела с меньшим потенциалом непрерывно отводить приносимые заряды, а к телу с большим потенциалом непрерывно их подводить. Иными словами электрическая цепь должна быть замкнутой. Но электрическое поле не может перемещать заряды по замкнутому пути ($A = 0$) и поэтому наряду с электрическими силами на перемещающиеся заряды должны действовать и силы не электростатического характера, так называемые сторонние силы.

Величину, равную работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда, называют электродвижущей силой источника (ЭДС)

$$E = \frac{A_{\text{ст}}}{q} \quad 4.9$$

По аналогии с электрическими силами стороннюю силу можно представить в виде:

$$\vec{F}_{\text{ст}} = \vec{E}_{\text{ст}} \cdot q, \quad 4.10$$

где $\vec{E}_{\text{ст}}$ - напряженность поля сторонних сил.

Тогда $A_{\text{ст}} = \oint \vec{E}_{\text{ст}} \cdot q \cdot d\ell = q \oint \vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\ell = q \cdot E$ и, следовательно,

$$E = \oint \vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\ell. \quad 4.11$$

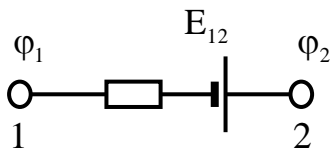


Рис. 23. К выводу закона Ома для неоднородного участка цепи

Рассмотрим неоднородный участок цепи 1 – 2 (рис.23). На участке 1-2 на заряды будут действовать две силы: электрическая сила $F_э$ и сторонняя сила $F_{\text{ст}}$ и их результирующая $\vec{F} = \vec{F}_э + \vec{F}_{\text{ст}} = q(\vec{E}_э + \vec{E}_{\text{ст}})$. Тогда работа по перемещению заряда между точками 1 и 2 будет определяться по формуле:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\ell = q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\ell + q \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\ell. \quad 4.12$$

Но $\int_1^2 \vec{E} \cdot d\ell = \phi_1 - \phi_2$, а $\int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\ell = E_{12}$, и тогда

$$A_{12} = q(\phi_1 - \phi_2) + q \cdot E_{12}. \quad 4.13$$

Величину $U_{12} = \frac{A_{12}}{q}$ называют напряжением между двумя точками электрической цепи

$$U_{12} = (\phi_1 - \phi_2) + E_{12}. \quad 4.14$$

При отсутствии источника тока ($E_{12} = 0$) напряжение U_{12} совпадает с разностью потенциалов.

4.4.3. Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля - Ленца.

При упорядоченном перемещении электрических зарядов электрическое поле совершает работу $dA = U \cdot dq$. Из 4.1 найдем, что $dq = I \cdot dt$ и тогда $dA = U \cdot I \cdot dt$. После интегрирования можно получить

$$A = \int_0^t U \cdot I \cdot dt = U \cdot I \cdot t = I^2 \cdot R \cdot t = \frac{U^2}{R} t. \quad 4.15$$

Следовательно, для мощности тока получим:

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}. \quad 4.16$$

При прохождении тока по проводнику он нагревается. Джоуль и Ленц установили, что количество теплоты, выделяющееся в проводнике, может быть найдено по формуле:

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t. \quad 4.17$$

Если сила тока изменяется во времени, то закон Джоуля-Ленца можно записать в виде:

$$Q = \int_0^t I^2(t) \cdot R \cdot dt. \quad 4.18$$

Закон Джоуля – Ленца можно записать в дифференциальной форме. Выделим в проводнике с током I элементарный объем в форме цилиндра длиной $d\ell$ и площадью поперечного сечения dS . Согласно закону Джоуля – Ленца 4.17 в нем будет выделяться количество теплоты:

$$dQ = I^2 \frac{\rho \cdot d\ell}{dS} dt = (j \cdot dS)^2 \frac{\rho \cdot d\ell}{dS} dt = j^2 \cdot \rho \cdot V \cdot dt. \quad 4.19$$

Количество теплоты, отнесенное к единице объема и единице времени, называется удельной тепловой мощностью тока

$$w = \frac{dQ}{V \cdot dt}. \quad 4.20$$

Учитывая 4.19 выражение 4.20 примет вид

$$w = j^2 \cdot \rho. \quad 4.21$$

Воспользовавшись соотношением 4.8 выражение 4.21 можно записать в виде:

$$w = j \cdot E^2. \quad 4.22$$

Формулы 4.21 и 4.22 выражают закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме.

5.4.3. Закон Ома для неоднородного участка цепи.

Чтобы получить закон Ома для неоднородного участка цепи, т.е. участка на котором действует ЭДС, воспользуемся законом сохранения энергии. Пусть на концах участка 1 – 2 (рис. 23) поддерживается разность потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2)$. Обозначим ЭДС, действующую на участке E_{12} , и зададим направление тока и ЭДС.

Если проводник неподвижен, то единственным результатом протекания тока будет его нагревание. Количество теплоты, выделяющееся в проводнике, определяется по закону Джоуля – Ленца 4.17:

$$dQ = I^2 \cdot R \cdot t = I \cdot R (I \cdot dt) = I \cdot R \cdot dq. \quad 4.23$$

При перемещении электрического заряда совершается работа

$$dA = E_{12} dq + dq(\varphi_1 - \varphi_2). \quad 4.24$$

Согласно закону сохранения энергии $dQ = dA$ и тогда

$$I \cdot R \cdot dq = E_{12} \cdot dq + dq(\varphi_1 - \varphi_2)$$

и после сокращения на dq окончательно получим

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm E_{12}}{R}. \quad 4.25$$

Формула 4.25 выражает закон Ома для неоднородного участка цепи. Из 4.25 следуют частные случаи:

1. Если $E_{12} = 0$, то $I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}$ - закон Ома для однородного участка цепи.
2. Если цепь замкнута $\varphi_1 = \varphi_2$, то $I = \frac{E_{12}}{R}$ - закон Ома для замкнутой цепи.

6.4.3. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа.

Закон Ома для неоднородного участка цепи позволяет рассчитать любую электрическую цепь, но расчет этот довольно сложен. Расчет электрических цепей значительно упрощается, если воспользоваться правилами Кирхгофа.

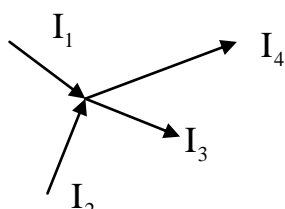


Рис.24. К первому правилу Кирхгофа

Назовем *узлом электрической цепи точку, в которой сходится не менее трех проводников* (рис. 24).

Токи, втекающие в узел, будем считать положительными, а вытекающие – отрицательными и тогда для узла (рис. 24), получим:

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = \sum_{i=1}^N I_i = 0. \quad 4.26$$

Это и есть первое правило Кирхгофа – *алгебраическая сумма токов сходящихся в узле равна нулю*. Первое правило Кирхгофа вытекает из закона сохранения электрического заряда.

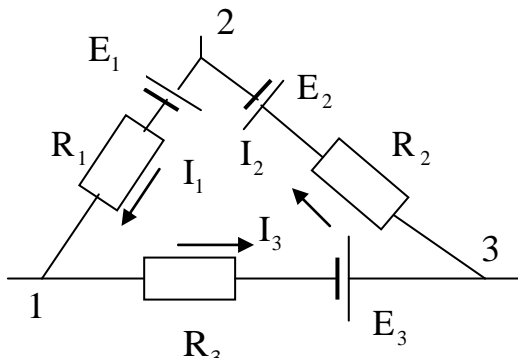


Рис. 25. К выводу второго правила Кирхгофа

Второе правило Кирхгофа является следствием закона сохранения энергии. Выделим в разветвленной электрической цепи замкнутый контур 1-2-3 (рис. 25). Зададим направление обхода контура (например, по часовой стрелке) и применим к каждому из участков закон Ома для неоднородного участка цепи:

$$\begin{aligned} -I_1 \cdot R_1 &= \varphi_1 - \varphi_2 + E_1 \\ -I_2 \cdot R_2 &= \varphi_2 - \varphi_3 + E_2 \\ -I_3 \cdot R_3 &= \varphi_3 - \varphi_1 - E_3 \end{aligned}$$

При суммировании этих выражений получим

$$-I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 = E_1 + E_2 - E_3 \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^N I_i \cdot R_i = \sum_{i=1}^N E_i. \quad 4.27$$

Формула 4.27 выражает второе правило Кирхгофа:

в замкнутом контуре, произвольно выделенном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивление соответствующих участков равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре.

При составлении уравнений по второму правилу Кирхгофа нужно току и ЭДС приписывать знаки. Если направление обхода контура совпадает с направлением силы тока и ЭДС, то они считаются положительными, в противном случае – отрицательными.

Направление обхода контура выбирается произвольно и не зависит от выбора направления в других контурах.

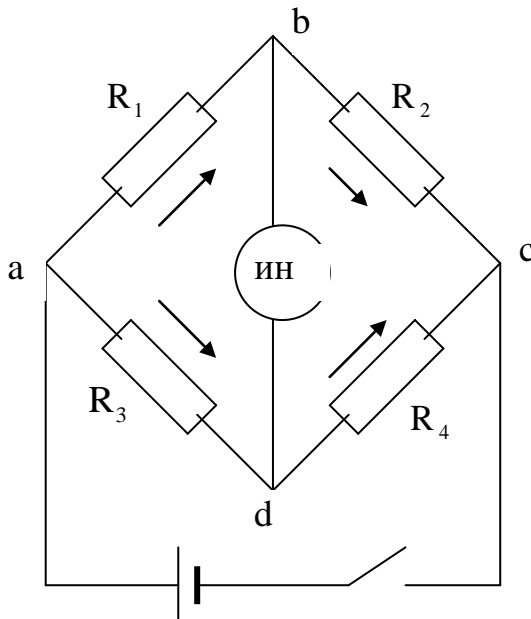


Рис. 26. Измерительный мост постоянного тока.

7.4.3. Измерительные мосты постоянного тока.

Для определения сопротивления проводников можно использовать метод амперметра и вольтметра, однако, этот метод приводит к появлению погрешности, так как сами приборы имеют какое-то сопротивление.

Для точных измерений сопротивления проводников широко применяются **измерительные мосты постоянного тока (мостик Уитстона)**. Измерительный мост постоянного тока представляет собой четырехугольный контур, образованный сопротивлениями R_1, R_2, R_3 и R_4 , в одну диагональ которого включается индикатор нуля (измерительная диагональ), а в другую – источник постоянного тока (диагональ питания) (рис. 26).

Мост называется уравновешенным, если ток в измерительной диагонали отсутствует, т.е. $I_{инн} = 0$. Выведем условие балансировки моста. Запишем первое правило Кирхгофа для узлов b и d

$$\begin{aligned} I_1 - I_{инн} - I_3 &= 0 \\ I_2 + I_{инн} - I_4 &= 0 \end{aligned} \quad 4.28$$

и второе правило Кирхгофа для контуров abda и bcdb.

$$\begin{aligned} I_1 R_1 + I_{инн} R_{инн} - I_3 R_3 &= 0 \\ I_2 R_2 - I_4 R_4 - I_{инн} R_{инн} &= 0 \end{aligned} \quad 4.29$$

Изменением известных сопротивлений R_2, R_3, R_4 можно добиться того, чтобы ток в индикаторе нуля был равен нулю, т.е. $I_{инн} = 0$. Тогда из 4.28 можно получить $I_1 = I_3$ и $I_2 = I_4$, а из 4.29 с учетом полученного найдем условие равновесие моста

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \Rightarrow R_1 = R_2 \cdot \frac{R_3}{R_4}. \quad 4.30$$

Это и есть условие балансировки моста постоянного тока. Таким образом, при определении неизвестного сопротивления R_1 величина ЭДС, внутреннее сопротивление источника и сопротивление гальванометра не играют ни какой роли.

8.4.3. Мощность тока во внешней цепи. КПД источника тока.

Электрическая цепь, как правило, состоит из источника тока, потребителя (нагрузки) и соединительных проводов. Пренебрегая сопротивлением подводящих проводов, для силы тока в цепи можно получить выражение

$$I = \frac{E}{R + r}.$$

Работа, совершаемая источником тока, при перемещении заряда вдоль замкнутой цепи,

$$A = E \cdot I \cdot t$$

и, следовательно, мощность, развиваемая источником тока, будет определяться по формуле

$$P = E \cdot I.$$

Подставляя значение силы тока, получим полную мощность, выделяющуюся в цепи:

$$P = \frac{E^2}{R + r}. \quad 4.31$$

Во внешней части цепи (в нагрузке) выделяется только часть этой мощности

$$P_{\text{п}} = I^2 \cdot R = \frac{E^2}{R + r} \cdot \frac{R}{R + r} \quad 4.32$$

которую называют полезной мощностью.

Из 4.31 и 4.32 следует, что КПД источника тока

$$\eta = \frac{P_{\text{п}}}{P} = \frac{R}{R + r}. \quad 4.33$$

Из формулы 4.32 следует, что полезная мощность зависит от сопротивления нагрузки R . Дифференцируя 4.32 по R и приравнявая производную нулю, можно найти, что полезная мощность максимальна при $R = r$. КПД источника тока в этом случае будет равен 0,5.

Законы постоянного тока

Примеры решения задач

Задача 9. Сила тока в проводнике сопротивлением 6 Ом равномерно нарастает в течение 5 с от нуля до 10 А. Определить количество теплоты, выделяющееся в проводнике за это время.

Дано: $R = 6 \text{ Ом}$
 $t_1 = 5 \text{ с}$
 $I_0 = 0$
 $I_1 = 10 \text{ А}$
 $Q = ?$

Если сила тока в проводнике изменяется, то закон Джоуля – Ленца необходимо записывать для бесконечно малого промежутка времени, т.е. $dQ = I^2 \cdot R \cdot dt$, где сила $I = I(t)$ - является некоторой функцией времени. В нашем случае $I = kt$ и тогда $dQ = k^2 \cdot R \cdot t^2 \cdot dt$.

Для определения количества теплоты, выделившегося за конечный промежуток времени, это выражение надо проинтегрировать, т.е. $Q = \int_0^{t_1} k^2 \cdot R \cdot t^2 \cdot dt = \frac{k^2 \cdot R \cdot t^3}{3}$. Значение коэффициента пропорциональности можно найти из условия, что при $t = t_1$ сила тока в проводнике равна I_1 и тогда, $k = \frac{I_1}{t_1}$. Подставляя в выражение для количества

теплоты, получим $Q = \frac{I_1^2 \cdot R \cdot t_1}{3}$.

Вычисляя, получим $Q = \frac{100 \cdot 6 \cdot 5}{3} = 1000 \text{ Дж}$.

Ответ: $Q = 1000 \text{ Дж}$.

Задача 10. К зажимам батареи с ЭДС 24 В и внутренним сопротивлением 1 Ом присоединен нагреватель мощностью 80 Вт. Определить силу тока в цепи и КПД нагревателя.

Дано: $E = 24 \text{ В}$
 $r = 1 \text{ Ом}$
 $P = 80 \text{ Вт}$
 $I - ?$
 $\eta - ?$

Мощность тока в проводнике можно определить по формуле $P = U \cdot I$. Напряжение на проводнике можно определить из закона Ома для замкнутой цепи $I = \frac{E}{R + r} \Rightarrow U = E - I \cdot r$ и, тогда $P = E \cdot I - I^2 \cdot r$. Подставляя численные значения, получим квадратное уравнение $I^2 - 24 \cdot I + 80 = 0$. Решая это уравнение, получим $I_{1,2} = 12 \pm \sqrt{144 - 80} = 12 \pm 8 \Rightarrow I_1 = 20 \text{ А}, I_2 = 4 \text{ А}$.

Из закона Ома для замкнутой цепи можно найти сопротивление нагревателя в обоих случаях $R = \frac{E - Ir}{I} \Rightarrow R_1 = \frac{24 - 20}{20} = 0,2 \text{ (Ом)}, R_2 = \frac{24 - 4}{4} = 5 \text{ (Ом)}$.

Коэффициент полезного действия определяется по формуле $\eta = \frac{R}{R + r}$ и, тогда в первом случае $\eta_1 = \frac{0,2}{1,2} = 0,17$, во втором случае - $\eta_2 = \frac{5}{6} = 0,83$.

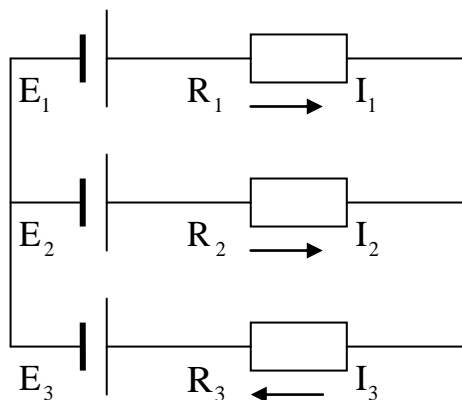
На практике обычно выбирают случай, в котором коэффициент полезного действия будет наибольшим.

Ответ: $I_1 = 20 \text{ А}, I_2 = 4 \text{ А}, \eta_1 = 0,17, \eta_2 = 0,83$.

Задача 11. Три источника тока ЭДС равной $E_1 = 11 \text{ В}, E_2 = 4 \text{ В}$ и $E_3 = 6 \text{ В}$ и три проводника $R_1 = 5 \text{ Ом}, R_2 = 10 \text{ Ом}, R_3 = 2 \text{ Ом}$ соединены так как показано на рисунке. Определить токи в проводниках. Внутренним сопротивлением источников тока можно пренебречь.

Дано:
 $E_1 = 11 \text{ В}$
 $E_2 = 4 \text{ В}$
 $E_3 = 6 \text{ В}$
 $R_1 = 5 \text{ Ом}$
 $R_2 = 10 \text{ Ом}$
 $R_3 = 2 \text{ Ом}$

 $I_1 - ?$
 $I_2 - ?$
 $I_3 - ?$



Выберем направление токов так, как указано на рисунке. Тогда первое правило Кирхгофа запишется в виде $I_1 + I_2 - I_3 = 0$.

Недостающие два уравнения составим по второму правилу Кирхгофа. Для верхнего контура (обход по часовой стрелке)

$I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 = E_1 - E_2$, для нижнего контура (при том же направлении обхода) $I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 = E_2$. Подставляя численные значения, получим систему уравнений

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$5I_1 - 10I_2 = 7$$

$$10I_2 - 2I_3 = -2$$

Решая полученную систему, можно найти $I_1 = 1,54 \text{ A}$, $I_2 = 0,07 \text{ A}$, $I_3 = 1,61 \text{ A}$. Все токи получились с положительным знаком, следовательно, мы правильно указали направление токов в проводниках.

Ответ: $I_1 = 1,54 \text{ A}$, $I_2 = 0,07 \text{ A}$, $I_3 = 1,61 \text{ A}$.

70. В схеме (рис. 1) $E_1 = 1\text{В}$, $E_2 = 2,5\text{В}$, $R_1 = 10\text{Ом}$, $R_2 = 20\text{Ом}$. Найти разность потенциалов между обкладками конденсатора.

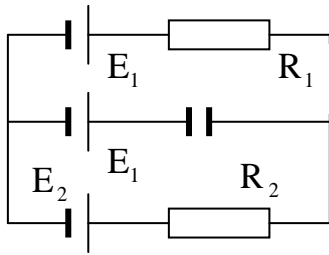


Рис. 1

71. Найти ЭДС и внутреннее сопротивление источника, эквивалентного двум параллельно соединенным элементам с ЭДС E_1 и E_2 и внутренними сопротивлениями r_1 и r_2 .

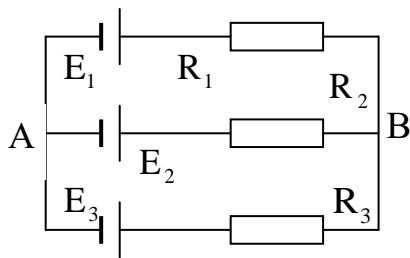


Рис. 3

72. Найти значение и направление тока через сопротивление R в схеме

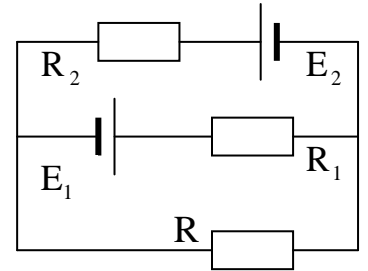


Рис. 2

(рис. 2), если $E_1 = 1,5\text{В}$, $E_2 = 3,7\text{В}$, $R_1 = 10\text{Ом}$, $R_2 = 20\text{Ом}$, $R = 5\text{Ом}$. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

73. В схеме (рис. 3) $E_1 = 1,5\text{В}$, $E_2 = 2\text{В}$, $E_3 = 2,5\text{В}$, $R_1 = 10\text{Ом}$, $R_2 = 20\text{Ом}$, $R_3 = 30\text{Ом}$. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

Определить ток через сопротивление R_1 и разность потенциалов между точками А и В.

74. Найти ток через сопротивление R в схеме (рис. 4). Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

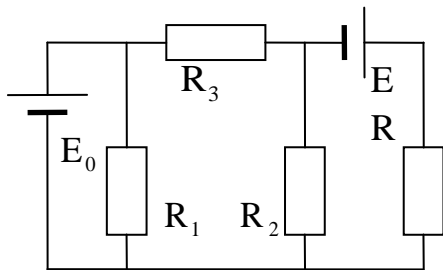


Рис. 4

75. Найти разность потенциалов между обкладками конденсатора C в схеме (рис. 5), если $E_1 = 4\text{В}$, $E_2 = 1\text{В}$, $R_1 = 10\text{Ом}$, $R_2 = 20\text{Ом}$, $R_3 = 30\text{Ом}$. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

76. В схеме (рис. 6) $E_1 = 110\text{В}$, $E_2 = 220\text{В}$, $R_1 = R_2 = 100\text{Ом}$, $R_3 = 500\text{Ом}$. Определить показание амперметра. Внутренними сопротивлениями источников можно пренебречь.

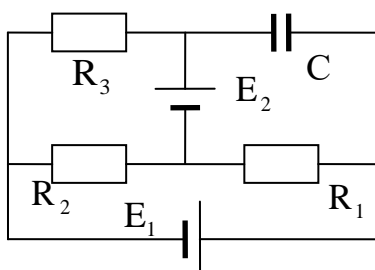


Рис. 5

77. В схеме (рис. 6) $E_1 = 2\text{В}$, $E_2 = 4\text{В}$, $R_1 = 0,5\text{Ом}$ и падение потенциала на сопротивлении

R_2 равно 1 В. Найти показания амперметра. Внутренним сопротивлением источников и амперметра пренебречь.

78. В схеме (рис. 6) $E_1 = 30\text{В}$, $E_2 = 10\text{В}$, $R_2 = 20\text{ Ом}$, $R_3 = 10\text{ Ом}$. Через амперметр идет ток в 1 А. Найти сопротивление R_1 . Сопротивлением источников и амперметра пренебречь.

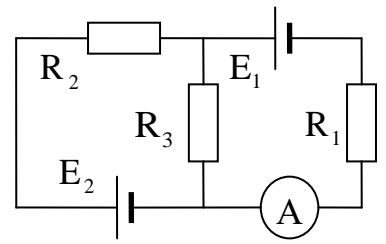


Рис.6

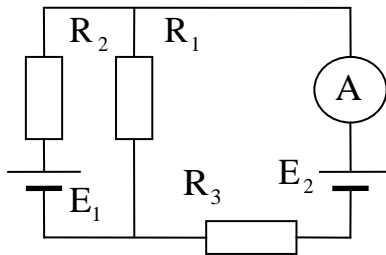


Рис. 7

79. Какую силу тока показывает амперметр в схеме (рис. 7), если $E_1 = 2\text{В}$, $E_2 = 1\text{В}$, $R_1 = 1000\text{ Ом}$, $R_2 = 500\text{ Ом}$, $R_3 = 200\text{ Ом}$ и сопротивление амперметра равно 200 Ом ? Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

80. В схеме (рис. 8) $E_1 = 2E_2$, $R_1 = R_2 = 20\text{ Ом}$, $R_3 = 15\text{ Ом}$, $R_4 = 30\text{ Ом}$. Амперметр показывает 1,5 А. Найти величины E_1 и E_2 , а также силы токов, текущих через сопротивления R_1 и R_2 . Сопротивлением источников и амперметра пренебречь.

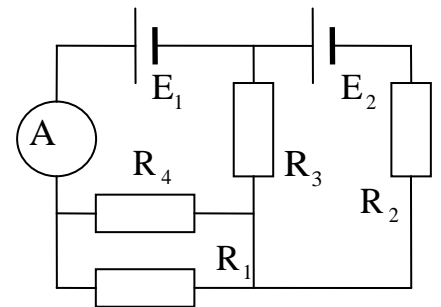


Рис. 8

81. Определить ЭДС источника тока, который надо включить между точками А и В (рис. 9), чтобы в резисторе R_3 шел ток 1 А в направлении указанном стрелкой, если $R_1 = 5\text{ Ом}$, $R_2 = 1\text{ Ом}$, $R_3 = 3\text{ Ом}$, $E_1 = 1,4\text{В}$.

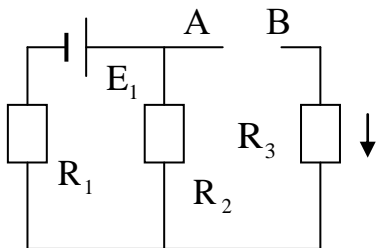


Рис. 9

82. В схеме (рис.10) $E_1 = 2E_2 = 110\text{В}$, $R_1 = R_2 = 200\text{ Ом}$, сопротивление вольтметра 1000 Ом . Найти показания вольтметра. Сопротивлением источников пренебречь.

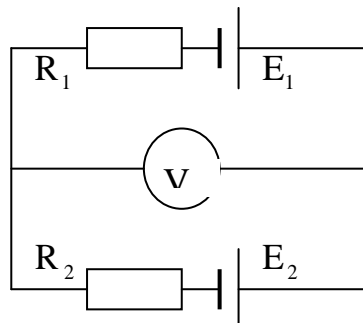


Рис. 10

83. Два одинаковых источника $1,2\text{В}$ и внутренним сопротивлением $0,4\text{ Ом}$ соединены разноименными полюсами (рис.11). Определить силу тока в цепи и разность потенциалов между точками А и В.

84. В медном проводнике при прохождении по нему постоянного тока выделилось 6 Дж теплоты. Найти напряженность электрического поля в проводнике.

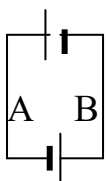


Рис. 11

85. По алюминиевому проводу сечением $0,2\text{ мм}^2$ течет ток $0,2\text{ А}$. Определить силу, действующую на отдельные свободные электроны со стороны электрического поля. Удельное сопротивление

источника тока с ЭДС $1,2\text{В}$ и внутренним сопротивлением $0,4\text{ Ом}$ соединены разноименными полюсами (рис.11). Определить разность потенциалов между точками А и В.

объемом 6 см^3 при янного тока за 1 минуту выделилось 216 Дж теплоты. Найти напряженность электрического поля в проводнике.

ление алюминия $2,6 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

86. В медном проводнике длиной 2 м и площадью поперечного сечения $0,4$ мм², течет ток. При этом каждую секунду выделяется количество теплоты 0,35 Дж. Сколько электронов проходит за 1 секунду через поперечное сечение этого проводника.

87. Плотность тока в медном проводнике равна $3 \frac{\text{А}}{\text{мм}^2}$. Найти напряженность электрического поля в проводнике.

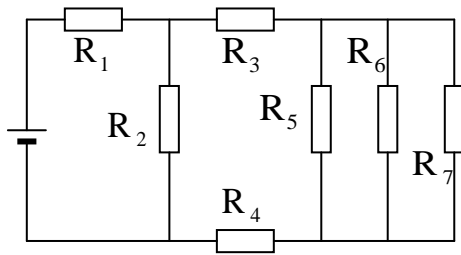


Рис. 12

88. Плотность тока в алюминиевом проводнике равна $1 \frac{\text{А}}{\text{мм}^2}$. Найти среднюю скорость упорядоченного движения электронов, предполагая, что концентрация свободных электронов равна концентрации атомов алюминия.

89. Определить среднюю скорость упорядоченного движения электронов в медном про-

воднике при силе тока 10 А и сечении проводника равном 1 мм². Принять, что на каждый атом меди приходится два электрона проводимости.

90. По проводнику сечением 50 мм² течет ток. Средняя скорость дрейфа электронов проводимости равна $0,3 \frac{\text{мм}}{\text{с}}$, а их концентра-

ция, $7,9 \cdot 10^{27}$ м⁻³. Какова сила тока и плотность тока в проводнике?

91. Найти среднюю скорость дрейфа электронов проводимости в проводнике, если концентрация электронов проводимости $4 \cdot 10^{28}$ м⁻³, сечение проводника 0,5 см², а ток в нем 3,2 А.

92. Какой силы ток идет по медной проволоке сечением 5 мм², если ско-

рость упорядоченного движения электронов $0,2 \frac{\text{мм}}{\text{с}}$, а концентрация электронов проводимости в меди $3 \cdot 10^{23}$ см⁻³.

93. В цепи, изображенной на рисунке 12, определить ЭДС источника, ток в каждом резисторе, если $R_1 = 16$ Ом, $R_2 = 21$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 17$ Ом,

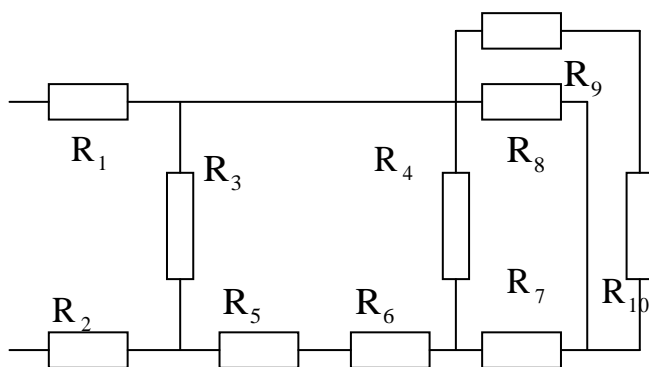


Рис. 14

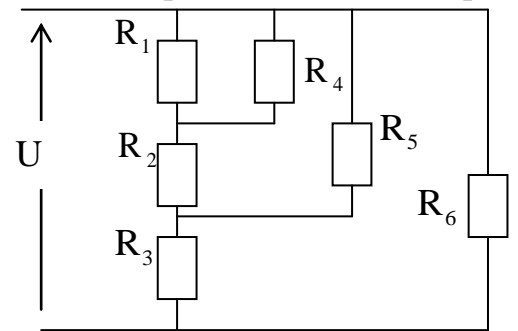


Рис. 13

$R_5 = 24 \text{ Ом}$, $R_6 = 60 \text{ Ом}$, $R_7 = 120 \text{ Ом}$, $r = 1 \text{ Ом}$. Напряжение на зажимах источника равно 90 В .

94. Определить ток и напряжение в каждом резисторе (рис. 13), если напряжение на зажимах цепи 120 В , $R_1 = R_6 = 60 \text{ Ом}$, $R_2 = 40 \text{ Ом}$, $R_3 = 36 \text{ Ом}$, $R_4 = 20 \text{ Ом}$, $R_5 = 15 \text{ Ом}$.

95. Определить ток и напряжение в каждом резисторе, а также напряжение на зажимах цепи, если $R_1 = R_6 = 60 \text{ Ом}$, $R_2 = 40 \text{ Ом}$, $R_3 = 36 \text{ Ом}$, $R_4 = 20 \text{ Ом}$, $R_5 = 15 \text{ Ом}$ (рис.13). Ток в резисторе R_1 равен $0,4 \text{ А}$.

96. В цепи, изображенной на рис. 14, определить ток в резисторах R_1 и R_2 , если приложенное напряжение на входе $U = 230 \text{ В}$, $R_1 = R_2 = 0,5 \text{ Ом}$

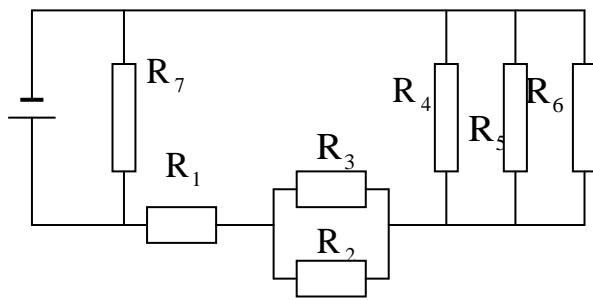


Рис. 15

$R_3 = 8 \text{ Ом}$, $R_4 = 12 \text{ Ом}$, $R_5 = R_6 = 1 \text{ Ом}$, $R_7 = 2 \text{ Ом}$, $R_8 = 15 \text{ Ом}$, $R_9 = 10 \text{ Ом}$, $R_{10} = 20 \text{ Ом}$.

97. В цепи, изображенной на рисунке 15, определить ЭДС источника электрической энергии, ток в каждом резисторе, если $R_1 = 6,4 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $R_3 = 12 \text{ Ом}$, $R_4 = 6 \text{ Ом}$, $R_5 = 3 \text{ Ом}$, $R_6 = 8 \text{ Ом}$, $R_7 = 20 \text{ Ом}$. Ток в первом

резисторе равен 10 А . Внутренним сопротивлением источника можно пренебречь.

98. Определить ЭДС источника электрической энергии, напряжение на его зажимах, а также ток в каждом резисторе (рис.16), если $R_1 = 4 \text{ Ом}$, $R_2 = R_3 = R_4 = 36 \text{ Ом}$, $R_5 = R_6 = R_7 = 12 \text{ Ом}$, $r = 1 \text{ Ом}$. Ток в резисторе R_7 равен $\frac{4}{3} \text{ А}$.

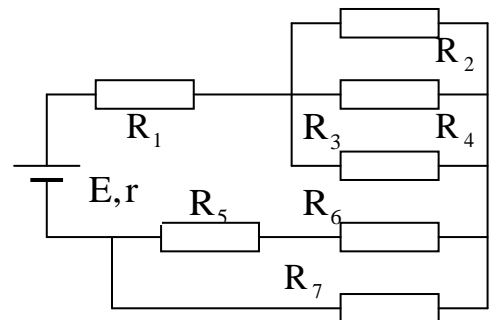


Рис. 16

99. Определить ток и напряжение в каждом резисторе, а также напряжение на зажимах цепи и ЭДС источника электрической энергии, если $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $R_3 = 11 \text{ Ом}$, $R_4 = R_5 = 11 \text{ Ом}$, $r = 0,8 \text{ Ом}$. Ток в резисторе R_3 равен $I_3 = \frac{32}{45} \text{ А}$ (рис. 17).

100. Определить ЭДС источника электрической энергии, токи во всех резисторах, если $R_1 = 28 \text{ Ом}$, $R_2 = R_5 = 30 \text{ Ом}$, $R_3 = 20 \text{ Ом}$, $R_4 = 15 \text{ Ом}$, $R_6 = 50 \text{ Ом}$, $R_7 = 5 \text{ Ом}$, $r = 1 \text{ Ом}$ (рис.16). Напряжение на зажимах источника электрической энергии 145 В .

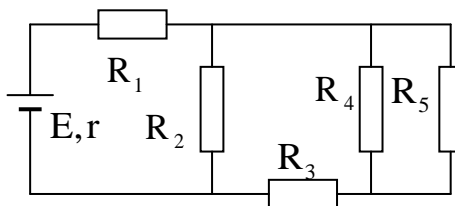


Рис. 17

101. В цепи, изображенной на рисунке 16, определить ЭДС источника, ток в каждом

резисторе, если $R_1 = 16 \text{ Ом}$, $R_2 = 21 \text{ Ом}$, $R_3 = 10 \text{ Ом}$, $R_4 = 17 \text{ Ом}$, $R_5 = 24 \text{ Ом}$, $R_6 = 60 \text{ Ом}$, $R_7 = 120 \text{ Ом}$, $r = 1 \text{ Ом}$. Напряжение на зажимах источника равно 90 В .

102. Две группы из трех последовательно соединенных элементов соединены параллельно. ЭДС каждого элемента равна $1,2 \text{ В}$, внутреннее сопротивление $0,2 \text{ Ом}$. Полученная батарея замкнута на внешнее сопротивление $1,5 \text{ Ом}$. Найти силу тока во внешней цепи.

103. Имеется N одинаковых гальванических элементов с ЭДС равной E и внутренним сопротивлением r каждый. Из этих элементов требуется собрать батарею, состоящую из нескольких параллельно соединенных групп, содержащих по n последовательно соединенных элементов. При каком значении n сила тока во внешней цепи, имеющей сопротивление R , будет максимальной? Чему будет равно внутреннее сопротивление батареи r при этом значении n ?

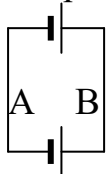


Рис. 18

104. Даны 12 элементов с ЭДС $1,5 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $0,4 \text{ Ом}$ каждый. Как нужно соединить эти элементы, чтобы получить от собранной из них батареи наибольшую силу тока во внешней цепи, имеющей сопротивление $0,3 \text{ Ом}$? Определить максимальную силу тока.

105. Сила тока в участке цепи, включенном между узлами с потенциалами 2 и 8 В равна $1,2 \text{ А}$. Когда участок перевернули, сила тока возросла до 6 А . Определить параметры участка.

106. Источник тока с внутренним сопротивлением $0,3 \text{ Ом}$, включенный между узлами, пропускает ток 5 А . Когда источник тока перевернули сила тока уменьшилась до 1 А . Определить разность потенциалов между узлами и ЭДС источника тока.

107. Два элемента с ЭДС $E_1 = 1,2 \text{ В}$, $E_2 = 0,9 \text{ В}$ и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0,1 \text{ Ом}$ и $r_2 = 0,3 \text{ Ом}$ соединены одноименными полюсами (рис. 18). Сопротивление соединительных проводов равно $0,2 \text{ Ом}$. Определить силу тока в цепи и разность потенциалов между точками A и B .

108. Участок цепи, включенный между узлами с потенциалами 1 и 6 В пропускает ток силой 2 А . Когда участок перевернули, то сила тока возросла до 5 А . Определить параметры участка.

109. ЭДС батареи равна 20 В . Внешнее сопротивление цепи равно 2 Ом , а сила тока 4 А . Определить КПД батареи.

110. От источника с ЭДС 500 В требуется передать энергию на расстояние $2,5 \text{ км}$. Потребляемая мощность 10 кВт . Найти минимальные потери мощности в цепи, если диаметр медных подводящих проводов равен $1,5 \text{ см}$.

111. Источник тока с ЭДС 2 В и внутренним сопротивлением $0,5 \text{ Ом}$ замкнут проводником. При этом мощность, выделяемая в нем максимальна. Определить сопротивление проводника и мощность, которая выделяется в проводнике.

112. Сила тока в проводнике сопротивлением 100 Ом равномерно возрастает от нуля до 10 А в течение 30 с. Определить количество теплоты, выделяющееся в проводнике за это время.

113. Ток в проводнике сопротивлением 15 Ом за 5 с возрастает от нуля до некоторого максимального значения. За это время в проводнике выделяется 10 кДж теплоты. Определить максимальное значение силы тока.

114. Сила тока в проводнике сопротивлением 100 Ом равномерно возрастает от нуля до 10 А в течение 30 с. Определить количество теплоты, выделяющееся в проводнике за это время.

115. Сила тока в проводнике сопротивлением 12 Ом равномерно убывает от 5 А до нуля в течение 5 с. Какое количество теплоты выделится в проводнике за это время?

116. Сила тока в проводнике сопротивлением 15 Ом равномерно возрастает от нуля до некоторого максимального значения в течение 5 с. За это время в проводнике выделяется 10 кДж теплоты. Найти заряд, протекающий по проводнику за это время.

117. При силе тока 10 А выделяемая генератором мощность во внешней цепи равна 200 Вт, а при силе тока 15 А мощность равна 240 Вт. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока, и силу тока короткого замыкания источника.

118. Определить заряд, прошедший по проводнику с сопротивлением 3 Ом при равномерном нарастании напряжения на его концах от 2 В до 4 В в течение 20 с.

119. Объяснить принципиальное устройство измерительного моста постоянного тока. Используя правила Кирхгофа вывести условие равновесия измерительного моста постоянного тока.

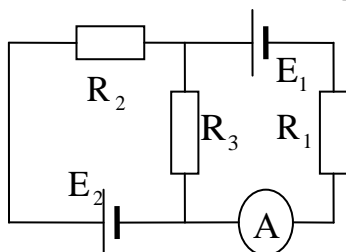


Рис. 20

120. Для электрической схемы, изображенной на рисунке 19, методом уравнений Кирхгофа определить токи в резисторах $R_1 = 7$ Ом, $R_2 = 8$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 6$ Ом, если $E_1 = 5,2$ В, $E_2 = 10$ В, $r_1 = 1$ Ом, $r_2 = 4$ Ом.

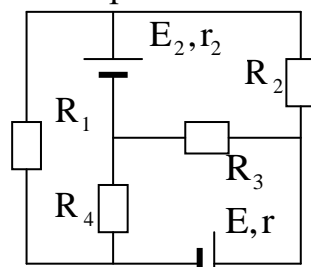


Рис. 19

121. В схеме (рис. 20) $E_1 = 2$ В, $E_2 = 4$ В, $R_1 = 0,5$ Ом и падение потенциала на сопротивлении R_2 равно 1 В. Найти показания амперметра. Внутренним сопротивлением источников и амперметра пренебречь.

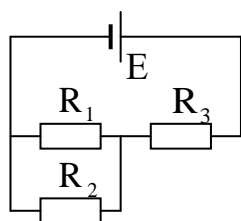


Рис. 22

122. Определить токи во всех ветвях (рис. 21), мощность, развиваемую каждым источником электрической энергии, если $E_1 = 2$ В, $E_2 = 1$ В,

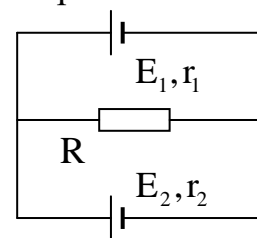


Рис. 21

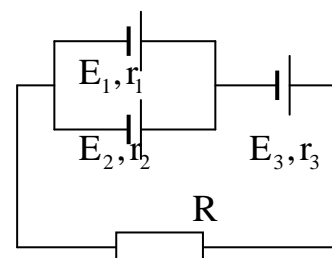


Рис. 23

$r_1 = r_2 = 1 \text{ Ом}$, $R = 2 \text{ Ом}$. Задачу решить методом уравнений Кирхгофа.

123. Определить мощность, выделяющуюся в проводнике сопротивлением R_2 , если $R_1 = 48 \text{ Ом}$, $R_2 = 16 \text{ Ом}$, $R_3 = 12 \text{ Ом}$, $E = 120 \text{ В}$ (рис. 22). Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.

124. Определить мощность, выделяющуюся в проводнике сопротивлением R_1 , если $R_1 = 12 \text{ Ом}$, $R_2 = 24 \text{ Ом}$, $R_3 = 22 \text{ Ом}$, $E = 120 \text{ В}$ (рис. 22). Внутренним сопротивлением источника тока можно пренебречь.

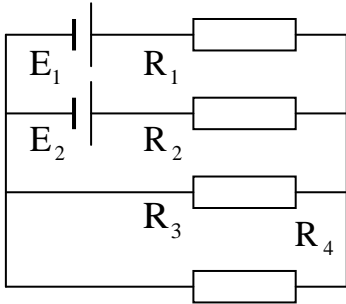


Рис. 24

показано на рис. 24, если $E_1 = 10 \text{ В}$, $E_2 = 4 \text{ В}$. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

127. Определить токи в резисторах R_1 и R_2 , сопротивление резистора R_1 , если $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $R_3 = 30 \text{ Ом}$, $E_1 = 120 \text{ В}$, $E_2 = 80 \text{ В}$, $r_1 = r_2 = 0$ (рис.25).

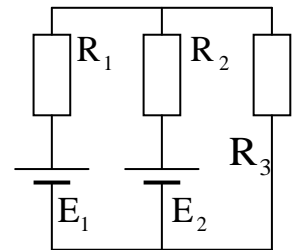


Рис. 25

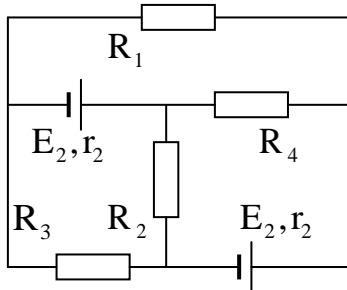


Рис. 26

128. Для электрической схемы, изображенной на рисунке 26, методом уравнений Кирхгофа определить токи в резисторах $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$, $R_3 = 4 \text{ Ом}$, $R_4 = 7 \text{ Ом}$, если $E_1 = 8 \text{ В}$, $E_2 = 4,2 \text{ В}$, $r_1 = 2 \text{ Ом}$, $r_2 = 3 \text{ Ом}$.

129. Для электрической схемы, изображенной на рисунке 27, методом уравнений Кирхгофа определить токи в резисторах, если $E_1 = 10 \text{ В}$, $E_2 = 4 \text{ В}$, $r_1 = 1 \text{ Ом}$, $r_2 = 2 \text{ Ом}$.

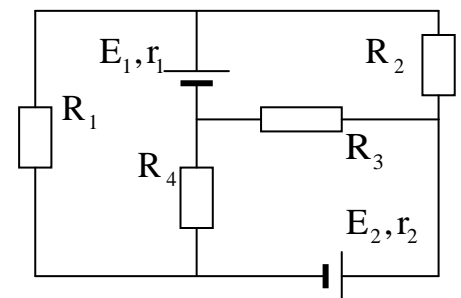


Рис. 27

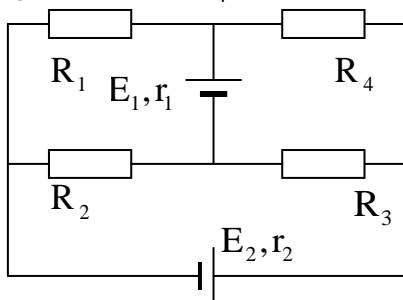


Рис. 28

131. Для электрической схемы, изображенной на рисунке 19, методом уравнений Кирхгофа определить токи в резисторах $R_1 = 7 \text{ Ом}$, $R_2 = 8 \text{ Ом}$,

$R_3 = 10 \text{ Ом}$, $R_4 = 6 \text{ Ом}$, если $E_1 = 5,2 \text{ В}$, $E_2 = 10 \text{ В}$, $r_1 = 1 \text{ Ом}$, $r_2 = 4 \text{ Ом}$.

Тема 5.3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1.5.3. Магнитное взаимодействие проводников с током. Магнитное поле.

Возможное существование тесной связи между электрическими и магнитными явлениями предполагали уже самые первые исследователи, пораженные аналогией электрических и магнитных явлений притяжения и отталкивания. Гильберт даже попытался доказать, что в данном случае мы имеем дело с совершенно разными явлениями.

Законы Кулона, формально одинаковые для электрических и магнитных явлений вновь выдвинули эту проблему.

После изобретения гальванического элемента (источника постоянного тока) попытки обнаружить связь между электрическими и магнитными явлениями стали более частыми и более интенсивными.

21 июля 1820 года Эрстед издал и разослал специалистам небольшую статью (всего 4 страницы) в которой он описал фундаментальный опыт по электромагнетизму - ток идущий по проводнику действует на магнитную стрелку.

Открытие Эрстеда имело для науки чрезвычайно важное значение и не только потому, что оно доказывало связь электрических и магнитных явлений. Из опыта Эрстеда вытекало, что в природе существуют силы, направленные не по прямой соединяющей взаимодействующие тела, а по нормали к этой прямой.

Исключительность открытия сделанного Эрстедом привлекла к нему большое внимание как экспериментаторов, так и теоретиков.

Взаимодействие проводников с током было открыто практически одновременно с действием электрического тока на магнитную стрелку в 1820 году и было подробно исследовано Ампером на опыте.

В результате было установлено, что токи одного направления притягиваются (рис. 27а), разного направления отталкиваются (рис. 27б).

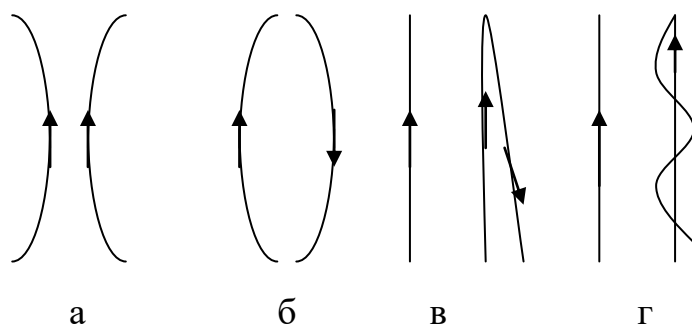


Рис. 27. Взаимодействие проводников с током.

Если по одному из проводников ток протекает в двух направлениях (рис. 27в), то он магнитного действия не оказывает и обратно, такой проводник не испытывает магнитного действия со стороны других проводников с током. Магнитное взаимодействие не наблюдается и в том случае, если одну часть проводника обвить (произвольным образом) вокруг другой его части (рис. 27г).

яются (рис. 27а), разного направления отталкиваются (рис. 27б). Если по одному из проводников ток протекает в двух направлениях (рис. 27в), то он магнитного действия не оказывает и обратно, такой проводник не испытывает магнит-

ного действия со сто-

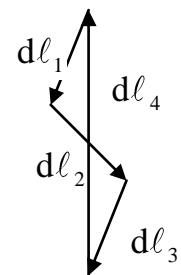


Рис. 28. К магнитному действию тока

В опытах Ампера было, прежде всего, установлено, что сила взаимодействия двух проводников с током пропорциональна силе тока в каждом из них. Из результатов опыта вытекает, что, элементы проводника $d\vec{\ell}_1, d\vec{\ell}_2, d\vec{\ell}_3$ (рис. 28) совместно производят такое магнитное действие как один элемент $d\vec{\ell}_4$, замыкающий эти отрезки.

Следовательно, магнитное действие тока зависит от произведения $I \cdot d\vec{\ell}$, где $d\vec{\ell}$ вектор, имеющий длину $d\ell$ и направленный вдоль тока. Это произведение называют *элементом тока*.

Понятие элемента тока играет в учение о магнетизме ту же роль, что и точечный заряд в электростатике. Закон взаимодействия элементов тока (по аналогии с законом Кулона) можно записать в виде

$$F = k \frac{I_1 d\vec{\ell}_1 \cdot I_2 d\vec{\ell}_2}{r^2}, \quad 5.1$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц. В международной системе этот коэффициент принимается равным $k = \frac{1}{4\pi}$.

Для объяснения взаимодействия проводников с током было введено понятие магнитного поля (по аналогии с электрическим полем). Основное свойство магнитного поля – возникает вокруг проводника с током и обнаруживается по действию на проводник с током или магнитную стрелку.

2.5.3. Напряженность и индукция магнитного поля.

Для количественной характеристики магнитного поля служит величина, получившая название напряженности магнитного поля H , которую мы определим по аналогии с напряженностью электрического поля. Если выражение 5.1 разделить на $I_2 d\vec{\ell}_2$, то получим

$$d\vec{H} = k \frac{I_1 d\vec{\ell}_1}{r^2}. \quad 5.2$$

Эта величина зависит лишь от элемента тока $I_1 d\vec{\ell}_1$ и положения той точки, где находится элемент тока $I_2 d\vec{\ell}_2$ и поэтому характеризует магнитное поле тока I_1 в данной точке. Направление вектора $d\vec{H}$ перпендикулярно плоскости содержащей вектора $d\vec{\ell}$ и \vec{r} и определяется с помощью правила правого винта.

Если направление поступательного перемещения правого винта совпадает с направлением тока в проводнике, то направление вращения головки винта дает направление вектора напряженности магнитного поля в данной точке.

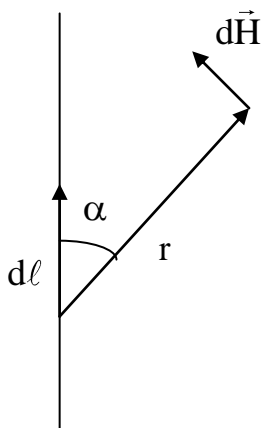


Рис. 29. К расчету магнитного поля тока.

Магнитное поле, так же как и электрическое можно изображать с помощью линий напряженности магнитного поля.

Непрерывная линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с вектором напряженности магнитного поля, называется линией напряженности магнитного поля.

В отличие от силовых линий электрического поля линии напряженности магнитного поля не имеют ни начала, ни конца. Они либо замкнуты, либо начинаются в бесконечности и уходят в бесконечность. Замкнутость линий напряженности говорит о том, что магнитных зарядов (подобных электрическим зарядам) в природе не существует.

Напряженность магнитного поля \vec{H} характеризует магнитное поле создаваемое макроскопическими токами и поэтому определяется их величинами, конфигурацией в пространстве и не зависит от свойств среды (аналог электрического смещения \vec{D} в электростатике). Рассматривая электрическое поле мы вводили напряженность электрического поля \vec{E} , которая зависит от свойств среды и связана с электрическим смещением выражением $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$. По аналогии для магнитного поля можно ввести величину \vec{B} - вектор индукции магнитного поля, который связан с напряженностью магнитного поля \vec{H} соотношением

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad 5.3$$

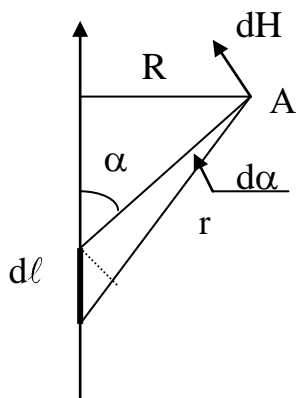
где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ - магнитная постоянная, μ - магнитная проницаемость среды.

3.5.3. Закон Био-Савара-Лапласа для элемента тока. Расчет магнитных полей.

В том же 1820 году магнитное поле постоянных токов изучалось на опыте Био и Саваром. Результаты опытов были математически обработаны Лапласом и поэтому, закон получил название закона Био-Савара-Лапласа.

Для элемента тока они получили формулу

$$dH = \frac{I \cdot dl}{4\pi r^2} \sin \alpha, \quad 5.4$$



где r - расстояние от элемента тока до рассматриваемой точки, α - угол между направлением тока и направлением на рассматриваемую точку (рис. 29). Чтобы найти результирующий вектор напряженности, создаваемый проводником с током конечной длины, надо на основании принципа суперпозиции полей, просуммировать все элементарные напряженности, т.е.

Рис. 30. К расчету магнитного поля прямого тока.

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^N d\vec{H}_i.$$

В общем случае этот расчет довольно сложен, но если проводник имеет симметрию, то расчет упрощается. Рассмотрим некоторые примеры.

Магнитное поле прямого тока. Определим напряженность магнитного поля создаваемого прямолинейным проводником с током в точке А (рис. 30). Из рисунка видно, что $d\ell \cdot \sin \alpha = r \cdot d\alpha$ и $R = r \cdot \sin \alpha$. Подставляя эти значения в закон Био-Савара-Лапласа 5.4, получим:

$$dH = \frac{I}{4\pi R} \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

Интегрируя полученное выражение, для напряженности магнитного поля прямого проводника конечной длины получим выражение:

$$H = \frac{I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad 5.5$$

Для бесконечно длинного проводника $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 180^\circ$ и тогда

$$H = \frac{I}{2\pi R}. \quad 5.6$$

Магнитное поле кругового тока. Определим напряженность магнитного поля в центре кругового тока. В этом случае все элементы проводника перпендикулярны к радиус-вектору и поэтому $\sin \alpha = 1$, тогда $dH = \frac{1}{4\pi} \frac{d\ell}{r^2}$. Все элементы тока создают напряженность поля одного направления и поэтому, полная напряженность в центре кругового тока будет определяться по формуле:

$$H = \int \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{d\ell}{r^2} = \frac{I}{2R}, \quad 5.7$$

где R – радиус кругового тока.

Определим напряженность магнитного поля в точке С, лежащей на оси кругового тока, на расстоянии b от его центра. Вектор $d\vec{H}$ перпендикулярен плоскости, проходящей через векторы \vec{r} и $d\vec{\ell}$ (рис. 31). Следовательно, они образуют симметричный конический веер. Разложив вектор $d\vec{H}$ на составляющие dH_x и dH_y , получим, что $\sum dH_y = 0$, а $H = \sum dH_x$. Учитывая, $dH_x = dH \cdot \sin \beta$ будем иметь

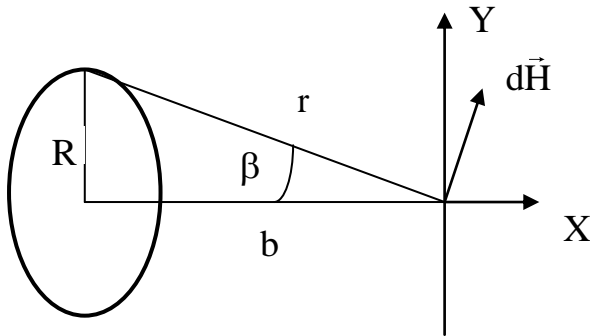


Рис. 31. К расчету напряженности магнитного поля на оси кругового тока.

$$H = \int dH \cdot \sin \beta = \frac{I}{4\pi} \int \frac{R d\ell}{r^3} = \frac{I}{4\pi} \frac{2\pi R^2}{r^3} = \frac{I \cdot R^2}{2r^3}.$$

Заменив $r = \sqrt{R^2 + b^2}$, окончательно получим

$$H = \frac{I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad 5.8$$

4.5.3. Циркуляция вектора \vec{H} . Магнитное поле соленоида и тороида.

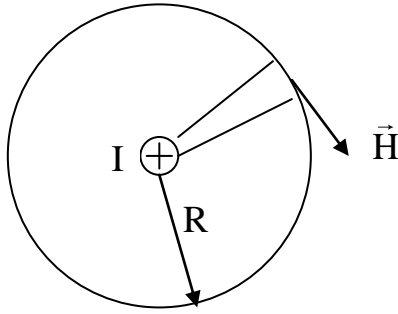


Рис. 32. К расчету циркуляции вектора \vec{H} .

По аналогии с электрическим полем можно ввести величину называемую **циркуляцией вектора напряженности \vec{H}** по произвольному контуру. Ранее мы показали, что для электрического поля $\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$. Найдем значение интеграла

$\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$ для магнитного поля созданного бесконечным проводником с током I . Выберем контур в виде окружности радиуса R , центр которой совпадает с проводником (рис. 32). В этом случае по 5.6 $H = \frac{I}{2\pi R}$, а $d\ell = R \cdot d\varphi$ и тогда

$$\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\ell} \frac{I}{2\pi} d\varphi = \frac{I}{2\pi} \oint_{\ell} d\varphi = I. \quad 5.9$$

Если воспользоваться принципом суперпозиции полей $\vec{H} = \sum_{i=1}^N \vec{H}_i$, то можно показать, что в случае, когда контур охватывает не один, а несколько токов, то

$$\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \sum_{i=1}^N \oint_{\ell} \vec{H}_i \cdot d\vec{\ell} = \sum_{i=1}^N I_i. \quad 5.10$$

Циркуляция вектора \vec{H} по произвольному контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром.

Знак тока определяется правилом правого винта, если направление тока совпадает с направлением поступательного перемещения правого винта, то ток считается положительным, в противном случае – отрицательным. Если контур токов не охватывает, то $\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 0$, так как в этом случае верхний и нижний

предел интегрирования в выражении 5.9 совпадают.

Воспользуемся полученным результатом для определения напряженности магнитного поля соленоида. В этом случае, как показывает опыт, поле сосредоточено внутри катушки, а за ее пределами поля практически нет. Выберем прямоугольный контур, со стороной ℓ , который охватывает N витков катушки.

Тогда, по 5.10 будем иметь $\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = N \cdot I$, но с другой стороны $\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H \cdot \ell$ и, следовательно,

$$H = \frac{NI}{\ell} = nI, \quad 5.11$$

где $n = \frac{N}{\ell}$ - число витков на единицу длины катушки.

Важное значение для практики имеет магнитное поле тороида – кольцевой катушки, витки которой намотаны на сердечник имеющий форму тора. Магнитное поле сосредоточено внутри тороида, вне его - поле практически отсутствует. Для расчета напряженности магнитного поля тороида используется выражение 5.11, только берется длина средней линии.

5.3.3. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для вектора \vec{B} .

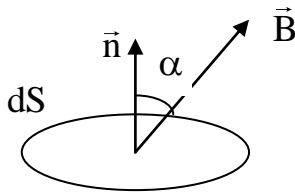


Рис. 33. К определению магнитного потока

Пусть площадку dS пронизывает магнитное поле с индукцией B , так что направление вектора \vec{B} образует угол α с направлением нормали к площадке (рис. 33).

Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через площадку dS называется величина

$$d\Phi = B \cdot dS \cdot \cos \alpha. \quad 5.12$$

Поток вектора \vec{B} величина скалярная, знак потока определяется направлением положительной нормали к контуру. Как правило, поток вектора \vec{B} связывают с контуром, по которому течет ток. В этом случае направление положительной нормали к контуру связывают с током правилом правого винта. Таким образом, магнитный поток, создаваемый контуром с током через поверхность, ограниченную им самим, всегда положителен. Поток вектора магнитной индукции через произвольную поверхность S определяется по формуле

$$\Phi = \int_S B_n \cdot dS. \quad 5.13$$

Теорема Гаусса для поля вектора \vec{B} - **поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность всегда равен нулю**, т.е.

$$\Phi = \oint_S B \cdot dS = 0. \quad 5.14$$

Это связано с тем, что линии магнитной индукции замкнуты и поэтому число линий входящих в поверхность с одной стороны, равно числу линий выходящих с другой стороны.

6.5.3. Силы Ампера и Лоренца.

Ампер на опыте установил, что на проводник с током в магнитном поле действует сила

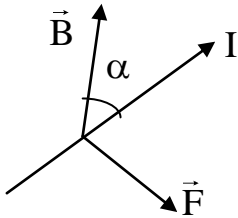
$$\vec{F} = I[\vec{\ell}\vec{B}], \quad 5.15$$

модуль которой определяется по формуле:

$$F = I \cdot B \cdot \ell \cdot \sin \alpha,$$

а направление, по правилу правого винта или правилу «левой руки» (рис. 34).

Возникновение этой силы связано с тем, что магнитное поле действует на заряженные частицы, движущиеся в проводнике с некоторой скоростью \vec{v} . Сила, действующая на заряд в этом случае, называется силой Лоренца и определяется по формуле:



$$\vec{F} = q[\vec{v}\vec{B}], \quad 5.16$$

а ее модуль

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha,$$

Рис. 34. Сила Ампера.

где α - угол между направлениями скорости частицы и вектора магнитной индукции.

Отметим, что магнитное поле не действует на покоящийся заряд и в этом состоит существенное отличие магнитного поля от электрического.

Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости частицы (ее перемещению) и поэтому работы не совершает, а, следовательно, не изменяет кинетическую энергию частицы.

Выражение для силы Лоренца 5.16 позволяет определить характер движения заряженной частицы в магнитном поле. При $\alpha = 90^\circ$ частица движется по окружности радиуса $R = \frac{mv}{qB}$. Если угол α удовлетворяет условию $0 < \alpha < 90^\circ$,

то частица движется по спирали с радиусом R и шагом h .

Если скорость частицы \vec{v} составляет угол α с вектором магнитной индукции \vec{B} неоднородного магнитного поля, индукция которого возрастает в направлении движения частицы, то R и h уменьшаются. На этом основано явление фокусировки заряженных частиц в магнитном поле.

7.5.3. Контур с током в магнитном поле.

Рассмотрим контур с током, находящийся в однородном магнитном поле. Выделим элемент контура $d\vec{\ell}$. На него в магнитном поле будет действовать сила, согласно 5.15, равная $d\vec{F} = I[d\vec{\ell} \cdot \vec{B}]$.

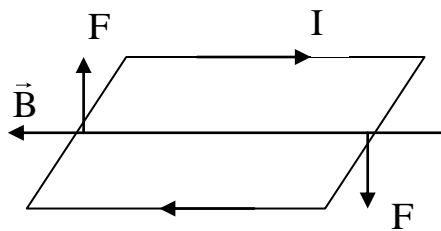


Рис. 35. Контур с током в однородном магнитном поле.

Результирующая сила, действующая на контур, будет равна геометрической сумме сил, действующих на отдельные элементы контура, т.е.

$$\vec{F} = \oint_{\ell} I[d\vec{\ell} \cdot \vec{B}] = IB \oint_{\ell} d\vec{\ell} = 0. \quad 5.17$$

Следовательно, в однородном магнитном поле результирующая сила, действующая на

контур с током, будет равна нулю и контур перемещаться не будет.

Для простоты рассуждений возьмем прямоугольный контур со сторонами «а» и «b» (рис. 35). В магнитном поле на него будет действовать вращающий момент пары сил \vec{F} и поэтому, контур будет вращаться. Вращающий момент пары сил $M = F \cdot b \cdot \sin \alpha$, но $F = I \cdot B \cdot a$, и, следовательно, $M = a \cdot b \cdot I \cdot B \cdot \sin \alpha$. Так как $a \cdot b = S$ - площадь контура, то $M = I \cdot B \cdot S \cdot \sin \alpha$. Введем вектор $\vec{p} = I \cdot S$ называемый вектором магнитного момента контура. Его направление совпадает с направлением положительной нормали к контуру, которая определяется с помощью правила правого винта. Тогда для вращающего момента, действующего на контур с током в магнитном поле, получим выражение:

$$M = pB \sin \alpha = [\vec{p}\vec{B}]. \quad 5.18$$

Очевидно, что $M = 0$ при $\sin \alpha = 0$, т.е. контур с током в магнитном поле ориентируется так, чтобы его вектор магнитного момента был параллелен вектору магнитной индукции.

Рассмотрим контур, находящийся в неоднородном поле. Работа, совершаемая при повороте контура на угол $d\alpha$, определяется по формуле $dA = M \cdot d\alpha$. С учетом 5.18 получим:

$$dA = p \cdot B \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

Полная работа

$$A = \int dA = \int p \cdot B \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha = -pB \cos \alpha. \quad 5.19$$

Потенциальная энергия контура с током в магнитном поле будет определяться этим же выражением.

Ранее мы показали, что $F_x = -\frac{dW}{dx}$ и, следовательно, на контур с током в неоднородном магнитном поле будет действовать сила

$$F_x = p \cdot \frac{dB}{dx} \cdot \cos \alpha. \quad 5.20$$

При $\alpha < 90^\circ$, $F_x > 0$ контур втягивается в поле, при $\alpha > 90^\circ$, $F_x < 0$ контур выталкивается из поля.

8.5.3. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле.

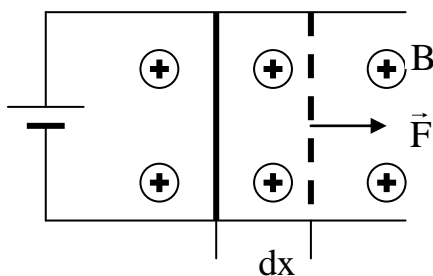


Рис. 36. К определению работы по перемещению проводника с током в магнитном поле.

На проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера. Если при этом проводник не закреплен, то он будет перемещаться в магнитном поле. Следовательно, магнитное поле будет совершать работу.

Рассмотрим проводник длиной ℓ , с током I , способный свободно перемещаться в магнитном поле с индукцией \vec{B} , направленной перпендикулярно проводнику (рис. 36). В этом

случае на проводник будет действовать сила Ампера $F = B \cdot I \cdot \ell$ и при перемещении проводника на расстояние dx , будет совершена работа $dA = I \cdot B \cdot \ell \cdot dx$, но $\ell \cdot dx = dS$, а $B \cdot dS = d\Phi$ и тогда $dA = I \cdot d\Phi$. Интегрируя данное выражение, получим, что работа по перемещению проводника с током в магнитном поле будет определяться выражением

$$A = I \cdot \Delta\Phi, \quad 5.21$$

где $\Delta\Phi$ - магнитный поток, пересеченный проводником.

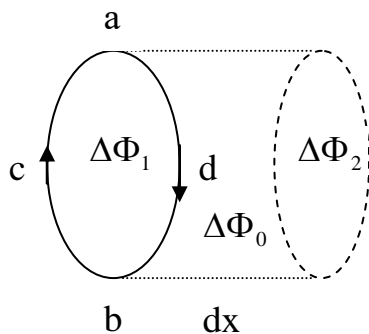


Рис. 37. К определению работы по перемещению контура с током в магнитном поле.

Найдем работу по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле. Пусть контур, двигаясь в плоскости чертежа, совершает бесконечно малое перемещение dx из состояния I в состояние II (рис. 37). Разобьем контур на два проводника, соединенных своими концами (adb, bca). Полная работа dA по перемещению контура будет равна сумме работ dA_1 и dA_2 по перемещению каждого из проводников. По формуле 5.21 $dA_1 = I(\Delta\Phi_0 + \Delta\Phi_1) > 0$, а $dA_2 = I(\Delta\Phi_0 + \Delta\Phi_2) < 0$ и тогда

$$dA = I(\Delta\Phi_2 - \Delta\Phi_1) = I \cdot \Delta\Phi, \quad 5.22$$

т.е. работа по перемещению контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока на изменение магнитного потока, пронизывающего этот контур. Формула 5.22 остается справедливой и при произвольном перемещении контура.

Тема 6.3. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОНА И ЭЛЕКТРОННОЙ ОБОЛОЧКИ АТОМА

1.6.3. Элементарный ток. Механический и магнитный моменты электрона.

Согласно планетарной модели, электрон в атоме движется вокруг ядра по круговой орбите радиуса R (рис. 38). При этом через площадку S , расположенную на пути электрона будет переноситься заряд $q = e \cdot N$, где N – число оборотов электрона

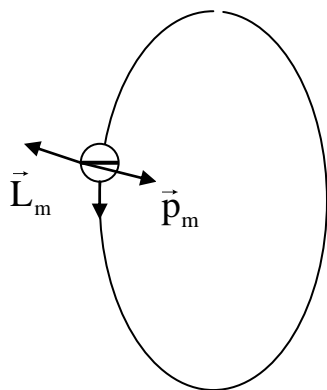


Рис. 38. Орбитальные магнитный момент и механический момент импульса

за время t . Так как, по определению $I = \frac{q}{t}$, то $I = \frac{eN}{t} = e \cdot \nu$, где ν - частота обращения электрона. Следовательно, можно утвер-

ждать, что электрон, движущийся вокруг ядра, эквивалентен элементарному току

$$I = e \cdot v. \quad 6.1$$

Движущийся электрон подобен контуру с током I и тогда его магнитный момент

$$\vec{p}_m = IS = e \cdot v \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{e \cdot v \cdot R}{2} \quad 6.2$$

называется орбитальным магнитным моментом.

Но движущийся вокруг ядра электрон обладает и механическим моментом импульса

$$L_m = m \cdot v \cdot R. \quad 6.3$$

Отношение $\frac{\vec{p}_m}{\vec{L}_m} = g$ называется гиромангнитным отношением орбитальных

моментов. Для электрона, движущегося вокруг ядра, это отношение с учетом 6.2 и 6.3 будет равно:

$$g = -\frac{e}{2m}. \quad 6.4$$

Знак минус говорит о том, что вектора \vec{p}_m и \vec{L}_m направлены в разные стороны (рис. 38).

Вследствие вращения вокруг ядра электрон подобен волчку. Это обстоятельство лежит в основе так называемых гиромангнитных или магнитомеханических явлений, заключающихся в том, что намагничивание магнетика приводит к его вращению, и, наоборот, вращение магнетика вызывает его намагничивание. Существование первого из них было доказано экспериментально Эйнштейном и де-Хаасом, второго – Барнеттом. В опытах Эйнштейна и де-Хааса, Барнетта было определено гиромангнитное отношение, которое оказалось равным

$$g = -\frac{e}{m},$$

т.е. в два раза больше, чем теоретическое значение. Следовательно, объяснить процесс намагничивания железа орбитальным движением электронов невозможно.

2.6.3. Спин электрона. Спиновый магнитный момент.

Для объяснения опытов Эйнштейна и де-Хааса, Барнетта в 1928 году Гаудсмит и Юленбек выдвинули предположение о том, что электрон обладает собственным магнитным моментом \vec{p}_{ms} и собственным механическим моментом импульса \vec{L}_{ms} отношение которых

$$\frac{\vec{p}_{ms}}{\vec{L}_{ms}} = -\frac{e}{m}. \quad 6.5$$

Собственный механический момент импульса электрона получил название спина. *Спин – внутренний момент импульса микрочастицы, имеет квантовую природу и не связан с движением частицы как целого.*

Изучение тонкой структуры спектральных линий атомов показало, что спин электрона равен $\frac{1}{2}\hbar$, где $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с - постоянная Планка и присущ ему, так же как и заряд и масса, т.е.

$$L_{ms} = \frac{1}{2}\hbar. \quad 6.6$$

В соответствии с 6.5. и 6.6 собственный магнитный момент электрона

$$\vec{p}_{ms} = -\vec{L}_{ms} \frac{e}{m} = -\frac{e \cdot \hbar}{2m}. \quad 6.7$$

Величину $\frac{e\hbar}{2m} = \mu_B = 0,927 \cdot 10^{-23}$ А·м² называют *магнетон Бора*. Следовательно, собственный магнитный момент электрона равен одному магнетону Бора.

Магнитный момент атома складывается из орбитальных моментов электронов, входящих в его состав и магнитного момента ядра. Магнитный момент ядра достаточно мал и поэтому, при рассмотрении многих вопросов им можно пренебречь и считать, что магнитный момент атома равен векторной сумме магнитных моментов электронов.

3.6.3. Структура электронных оболочек атомов.

Заполнение электронных оболочек сложных атомов объясняется на основе принципа Паули, сформулированного им в 1925 году.

Предполагается, что в одном квантовом состоянии, определяющимся тремя квантовыми числами (n, m, ℓ) может находиться не более двух электронов с различными направлениями спина. Итак, состояние электрона в атоме определяется четырьмя квантовыми числами (n, m, ℓ, S) , которые могут принимать следующие значения:

главное квантовое число $n = 1, 2, 3, \dots$,

орбитальное квантовое число $\ell = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$,

магнитное квантовое число $m = -\ell, -(\ell - 1), \dots, 0, \dots, (\ell - 1), \ell$,

спиновое квантовое число $S = \pm \frac{1}{2}$.

При нормальной последовательности заполнения слоев с увеличением атомного номера элемента сначала заполняются слои с меньшими номерами, а потом с более отдаленными.

Нормальный порядок заполнения не всегда имеет место, он нарушается в 3d слое. Элементы, имеющие не полностью заполненные d состояния, называются переходными.

Определение полного магнитного момента атома существенно облегчается в связи с тем, что у заполненных подслоев как орбитальные, так и спиновые магнитные моменты электронов скомпенсированы. Поэтому при определении магнитного момента атома надо учитывать только не полностью заполненные электронные слои.

4.6.3. Гипотеза Ампера. Объемные и поверхностные токи.

Для объяснения намагничивания вещества Ампер предположил, что в молекулах вещества циркулируют круговые токи. Каждый такой ток обладает магнитным моментом и создает магнитное поле. В отсутствие внешнего магнитного поля эти токи разориентированы и их результирующее поле равно нулю. Во внешнем магнитном поле эти токи ориентируются так, что их магнитные моменты направлены по полю и в результате внутри вещества элементарные токи направлены навстречу друг другу и компенсируются. Лишь на поверхности вещества эти токи имеют одно направление и складываются. Этот ток получил название поверхностного тока. Этот ток можно рассматривать как ток в катушке, что мы и будем делать в дальнейшем.

Тема 7.3. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА. МАГНЕТИКИ.

1.7.3. Намагниченность. Магнитное поле в веществе.

До сих пор мы рассматривали магнитное поле в вакууме. Если проводники с токами находятся не в вакууме, а в другой среде, то магнитное поле изменяется.

Это говорит о том, что различные вещества в магнитном поле намагничиваются, т.е. становятся источниками магнитного поля. Результирующее поле в среде является суммой полей создаваемых проводниками с током и намагничивающейся средой, и поэтому оно не равно полю в вакууме, т.е.

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}', \quad 7.1$$

где

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H} \quad 7.2$$

индукция магнитного поля в вакууме, \vec{B}' - индукция магнитного поля, создаваемого намагничивающейся средой. Вещества, способные намагничиваться, называются магнетиками.

Для описания намагничивания вещества введем вектор $\vec{p} = \sum \vec{p}_i$, где \vec{p}_i - магнитный момент атома.

Тогда для количественной оценки намагничения вещества можно ввести вектор

$$\vec{j} = \frac{\vec{p}}{V} \quad 7.3$$

называемый вектором намагничения и имеющий смысл намагничения единицы объема вещества.

Если среда намагничена неоднородно, то вектор намагничения определяется для физически малого объема, т.е.

$$j = \frac{d\vec{p}}{dV}.$$

Вектор намагничения является основной величиной, характеризующей магнитное состояние вещества. Зная вектор намагничения в каждой точке тела, можно определить и магнитное поле, создаваемое этим намагниченным телом.

Задача значительно упрощается, если вектор намагничения одинаков во всех точках магнетика (однородное намагничение).

Для определения индукции магнитного поля в магнетике возьмем образец в виде цилиндра, длиной ℓ и площадью поперечного сечения S . В этом случае поверхностные токи можно рассматривать как ток в катушке и для индукции поля, создаваемого этим током можно использовать выражение 5.11, т.е.

$$\vec{B}' = \mu_0 \cdot n \cdot I', \quad 7.4$$

где $n = \frac{1}{\ell}$ - число витков на единицу длины образца, I' - сила поверхностного тока. Тогда

$$\vec{B}' = \mu_0 \frac{I'}{\ell}. \quad 7.5$$

Магнитный момент поверхностного тока определяется по формуле

$$\vec{p} = \frac{I'}{\ell} \cdot \ell \cdot S = I' \cdot V, \quad 7.6$$

но с другой стороны, по 7.3

$$\vec{p} = \vec{j} \cdot V. \quad 7.7$$

Из равенства правых частей выражений 7.6 и 7.7 следует, что

$$\vec{j} = \frac{I'}{\ell} \quad 7.8$$

и выражение 7.5 принимает вид

$$\vec{B}' = \mu_0 \cdot \vec{j}. \quad 7.9$$

Подставляя 7.2 и 7.9 в 7.1, для индукции магнитного поля в среде получим:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \mu_0 \cdot \vec{j} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{j}) \quad 7.10$$

или

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{j}. \quad 7.11$$

Опыт показывает, что для большинства однородных и изотропных магнетиков (исключение – ферромагнетики) вектор намагничивания прямо пропорционален напряженности магнитного поля, т.е.

$$\vec{j} = \chi_m \cdot \vec{H}, \quad 7.12$$

где χ_m - магнитная восприимчивость вещества, величина безразмерная и составляет величину порядка $(10^{-4} \div 10^{-6})$.

Подставляя 7.12 в 7.11, получим:

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H}(1 + \chi_m). \quad 7.13$$

Безразмерная величина

$$\mu = 1 + \chi_m \quad 7.14$$

называется **магнитной проницаемостью вещества**. В отличие от диэлектрической восприимчивости χ_e , которая принимает только положительные значения, магнитная восприимчивость χ_m может быть как положительной, так и отрицательной. Поэтому магнитная проницаемость вещества μ может быть как больше единицы, так и меньше единицы.

Подставив 7.14 в 7.13, для индукции магнитного поля в веществе получим выражение

$$\vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H} \quad 7.15$$

которое совпадает с выражением 5.3 которое мы вводили эмпирически.

Магнетики у которых $\chi_m < 0$ и $\mu < 1$ получили название диамагнетиков, а вещества с $\chi_m > 0$ и $\mu > 1$ - парамагнетиков. Так как магнитная восприимчивость для диа- и парамагнетиков очень мала, то для них магнитная проницаемость μ незначительно отличается от единицы и поэтому, они относятся к слабо магнитным веществам.

3.7.3. Основные типы магнетиков. Природа диа- и парамагнетизма.

1. Диамагнитные свойства наблюдаются у веществ, атомы которых имеют магнитный момент \vec{p}_i равный нулю (неполярные диэлектрики), например, Bi, Ag, Cu, большинство органических соединений, углекислый газ.

Электрон, движущийся по круговой орбите, подобен волчку. Под действием магнитного поля, индукция \vec{B} которого составляет угол α с осью орбиты электрона, возникает прецессия электронной орбиты, при которой вектор магнитного момента атома \vec{p}_i , сохраняя постоянным угол α , вращается вокруг направления вектора магнитной индукции с некоторой частотой $\omega = \frac{eB}{2m}$ называемой Ларморовой частотой. Она не зависит от угла наклона α и одинакова для всех электронов.

Это движение электрона эквивалентно круговому току. Поскольку этот ток индуцирован магнитным полем, то по правилу Ленца, у атома появляется составляющая магнитного поля, направленная против внешнего магнитного поля. Эта составляющая существует у всех атомов и обуславливает собственное магнитное поле вещества, ослабляющее внешнее магнитное поле и поэтому у диамагнетиков $\chi_m < 0$, $\mu < 1$.

2. Парамагнитные свойства наблюдаются у веществ атомы, которых имеют отличный от нуля магнитный момент \vec{p}_i (полярные диэлектрики). В отсутствии внешнего магнитного поля, вследствие теплового движения, магнитные моменты атомов разориентированы и поэтому магнитный момент вещества равен нулю. При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле магнитные моменты атомов ориентируются по полю (полной ориентации препятствует хаотическое тепловое движение). Таким образом, парамагнетик намагничивается, создавая собственное магнитное поле, направленное по внешнему полю и усиливает его и, следовательно, $\chi_m > 0$, $\mu > 1$.

В парамагнетиках наблюдается и диамагнитный эффект, но он значительно слабее парамагнитного и им можно пренебречь.

Обобщая выше сказанное можно сказать, что в случае, когда магнитный момент атома велик, то преобладают парамагнитные свойства, если мал, то диамагнитные.

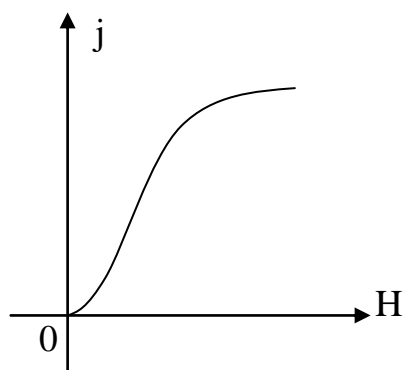


Рис. 39. Зависимость намагниченности ферромагнетика от напряженности внешнего магнитного поля.

4.7.3. Ферромагнетики и их свойства.

Парамагнетики и диамагнетики относятся к слабомагнитным веществам, но существуют и сильномагнитные вещества – **ферромагнетики** у которых $\mu \gg 1$ (железо, никель, кобальт, гадолиний, их сплавы и соединения).

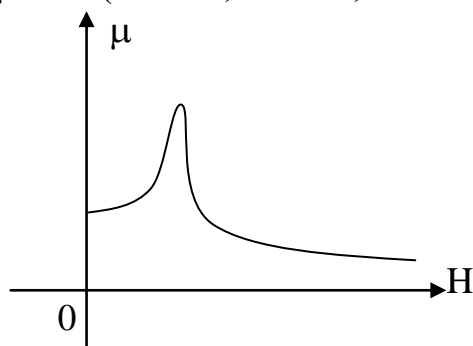


Рис. 40. Зависимость магнитной проницаемости ферромагнетика от напряженности внешнего магнитного поля.

Ферромагнетики помимо способности сильно намагничиваться обладают еще и другими свойствами, существенно отличающими их от диа – и парамагнетиков. Это, прежде всего нелинейная зависимость \vec{j} от \vec{H} или \vec{B} от \vec{H} . При возрастании \vec{H} намагниченность \vec{j} сначала растет быстро, затем рост замедляется и, наконец, достигается так называемое магнитное насыщение $\vec{j}_{нас}$ уже не зависящее от напряженности магнитного поля (рис. 39).

Вторая особенность ферромагнетиков состоит в том, что магнитная проницаемость μ не только имеет большие значения (для железа - 5000, для сплава супермаллоя - 800000), но и зависит от напряженности внешнего магнитного поля \vec{H} . Вначале μ растет с увеличением H , затем, достигая максимума, начинает уменьшаться, стремясь в случае сильных полей к 1 (рис. 40).

Характерная особенность ферромагнетиков состоит в том, что для них зависимость j от H определяется предысторией образца. Это явление получило название магнитного гистерезиса. Если образец намагнитить до насыщения (точка 1), а затем начать уменьшать напряженность намагничивающего поля, то, как показывает опыт, уменьшение j описывается кривой 1-2, лежащей выше кривой 0-1. При $H=0$ намагниченность отличается от нуля, т.е. в ферромагнетике наблюдается **остаточное намагничивание**. С наличием остаточного намагничивания связано существование постоянных магнитов. Намагничивание обращается в нуль под действием поля H_c , имеющего направление, противоположное

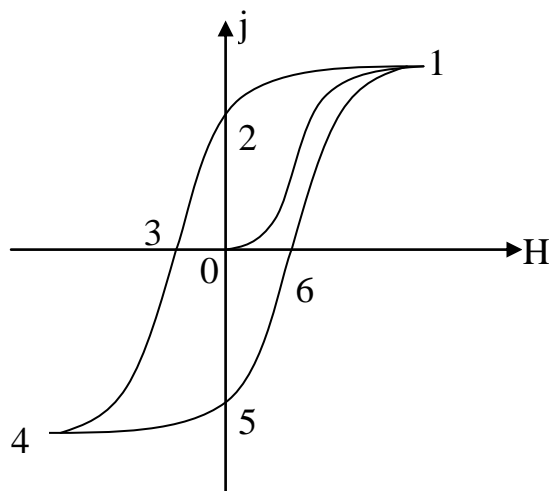


Рис. 41. Петля гистерезиса ферромагнетика

направлению поля, вызвавшему намагничивание. Напряженность магнитного поля H_c называется **коэрцитивной силой**.

При дальнейшем увеличении противоположно направленного поля ферромагнетик намагничивается до насыщения (кривая 3-4). Затем ферромагнетик можно снова размагнитить (кривая 4-5-6) и снова намагнитить до насыщения.

Таким образом, при действии на ферромагнетик переменного магнитного поля намагниченность j изменяется в

соответствии с замкнутой кривой, которая называется **петлей гистерезиса** (рис. 41). Гистерезис приводит к тому, что намагничивание ферромагнетика не является однозначной функцией напряженности \vec{H} , т.е. одному и тому же значению \vec{H} соответствуют различные значения намагничивания \vec{j} .

Ферромагнетики с малой (до 1-2 А/см) коэрцитивной силой (узкой петлей гистерезиса) называются **магнитомягкими**, а с большой (до нескольких тысяч А/см) - **магнитотвердыми**. Величины H_c , $j_{ост}$, μ_{max} определяют область применения ферромагнетиков.

Ферромагнетики обладают еще одной особенностью: для каждого из них имеется определенная температура, называемая **точкой Кюри**, при которой он теряет свои магнитные свойства и становится парамагнетиком.

Процесс намагничивания ферромагнетика приводит к изменению его линейных размеров и объема. Это явление получило название **магнитострикции** и широко используется в технике.

В настоящее время большое значение приобрели полупроводниковые ферромагнетики – **ферриты**, химические соединения типа $Me \cdot Fe_2O_3$, где Me – ион двухвалентного металла. Они отличаются заметными ферромагнитными свойствами и большим удельным сопротивлением (в миллиарды раз больше, чем у металлов).

Ферриты применяются для изготовления постоянных магнитов, сердечников трансформаторов, катушек индуктивности, ферритовых антенн и т.д.

5.7.3. Природа ферромагнетизма.

К ферромагнетикам относятся железо, кобальт, никель, гадолиний и ряд других металлов их сплавы и соединения, а также некоторые сплавы марганца, серебра, алюминия и др.

Ранее мы уже указывали, что объяснить намагничение железа орбитальным движением электронов невозможно (опыты Эйнштейна – де-Хааса, Барнетта).

По современным представлениям ферромагнетизм обусловлен спиновыми магнитными моментами атомов с незавершенными электронными оболочками, например, $3d$ для железа, никеля, и кобальта и $4f$ в случае редкоземельных металлов. Однако не все элементы с незавершенными электронными оболочками являются ферромагнетиками. Для возникновения ферромагнетизма необходимо наличие сильного обменного взаимодействия между спинами соседних атомов. Это взаимодействие заставляет спиновые моменты незавершенных электронных оболочек выстраиваться параллельно друг другу. В результате этого атом намагничивается до насыщения. Природа обменных сил была выяснена в квантовой механике.

В ферромагнетизме задача сводится к вычислению некоторого интеграла, обозначаемого A и называемого обменным. Этот интеграл должен иметь положительное значение. Только в этом случае обменные силы могут ориентировать спины. Было найдено простое условие, определяющее возможность возникновения ферромагнетизма: отношение параметра кристаллической решетки d к диаметру электронной орбиты должно быть равным или превышать 1,5, т.е.

$$\frac{d}{2R} \geq 1,5.$$

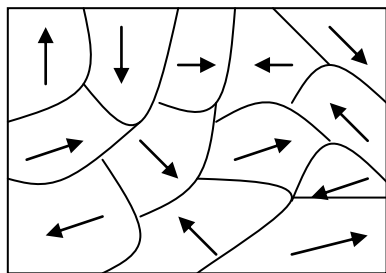


Рис. 42. Доменная структура ферромагнетика

Сильная ориентировка спинов электронов вызываемая силами обменного взаимодействия, которая возникает в ферромагнетике независимо от наличия внешнего магнитного поля, приводит к тому, что ферромагнетик намагничен до насыщения. Наличие такого спонтанного (самопроизвольного) намагничения является характерным свойством ферромагнетиков при температурах ниже точки Кюри. Это находится в кажущемся противоречии с

общеизвестным фактом отсутствия намагниченности у ферромагнетика не подвергнутому воздействию внешних магнитных полей.

Это противоречие устраняется, если принять, что каждый микрокристаллик ферромагнетика при возникновении спонтанной намагниченности оказывается разделенным на множество очень малых, вплоть до 10^{-6} м^3 , объемов, называемых **доменами**, намагниченными по разным направлениям легкого намагничивания, так, что результирующее намагничение такого микро кристаллика в отсутствии внешнего магнитного поля равно нулю.

Впервые эти представления были высказаны в работах Б.Л. Розинга (1892 г.) и вновь были выдвинуты Вейсом в 1907 году.

Вейс высказал гипотезу о том, что ферромагнетик разбивается на большое число малых (но макроскопических) областей – доменов. Каждый домен намагничен до насыщения (при температурах ниже точки Кюри), но намагниченность различных доменов ориентирована хаотически, так, что результирующая намагниченность равна нулю (рис. 43).

Существование доменов в ферромагнетиках можно доказать с помощью порошковых фигур (Биттер, Акулов Н.С., Дегтярь М.В.). Если на хорошо отполированную поверхность ферромагнетика поместить слой жидкости, в которой взвешены мельчайшие частицы ферромагнитного порошка, то эти частицы бу-

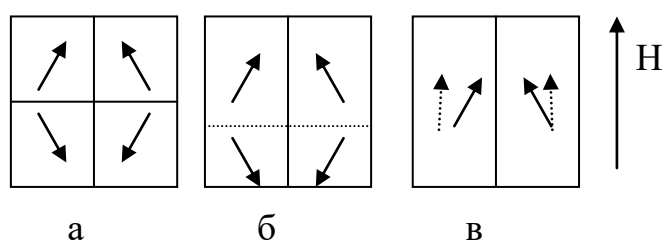


Рис. 43. Процесс намагничивания ферромагнетика. а) исходное состояние; б) процессы смещения; в) вращение

дут оседать в основном на те места, вблизи которых магнитное поле однородно. Но как раз вблизи границ доменов возникают неоднородности поля, и, поэтому, осевший порошок обрисует границы доменов.

Причиной возникновения доменов является, хорошо известно еще из механики, положение о

том, что наиболее устойчивым является такое состояние системы, при котором ее потенциальная энергия минимальна. Если бы кристалл не был разбит на домены, намагниченные в различных направлениях, то он представлял бы собой магнит с двумя полюсами, создающий магнитное поле. В этом поле была сосредоточена энергия $W = \frac{1}{2} \int \mu \cdot \mu_0 \cdot H^2 \cdot dV$. При образовании доменов магнит-

ный поток замыкается внутри кристалла, почти не выходя наружу, поэтому энергия кристалла значительно меньше, чем при наличии полюсов. Следовательно, образование доменов дает более устойчивую систему, к которой кристалл всегда приходит, если нет внешнего воздействия и интенсивность теплового движения недостаточна для нарушения параллельной ориентации спинов. Процесс разбиения кристалла на домены закончится тогда, когда выигрыш в магнитостатической энергии за счет образования более мелких доменов станет меньше, чем энергия, необходимая для образования новых доменных границ.

Намагничение ферромагнетика состоит в переориентации векторов намагничения доменов в направлении приложенного магнитного поля и включает процессы смещения и вращения.

В слабых магнитных полях происходит *упругое смещение* границ доменов. При этом домены с энергетически выгодной ориентацией вектора намагничения растут за счет доменов с энергетически невыгодной ориентацией намагниченности (рис. 43б).

Процесс вращения состоит в повороте векторов намагничения доменов в направлении вектора \vec{H} (рис. 43в). При полном совпадении вектора намагничения \vec{j} с направлением вектора \vec{H} достигается так называемое *техническое насыщение* ферромагнетика при заданной температуре.

6.7.3. Магнитные цепи.

Магнитные потоки широко используются в современной электротехнике. Действие электромагнитов, мощных генераторов, трансформаторов, электродвигателей и многих измерительных приборов основано на существовании в них магнитного потока.

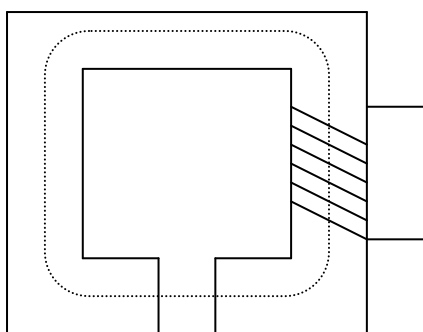


Рис. 44. Неразветвленная магнитная цепь

Для усиления магнитного потока всегда применяются ферромагнитные материалы. Изготавливая из них тела различной формы и размеров, оказывается возможным создавать магнитные потоки нужной величины и направлять их в нужном направлении.

Совокупность тел, внутри которых проходят замкнутые линии магнитной индукции, называется магнитной цепью.

Рассмотрим вначале простую или неразветвленную магнитную цепь. Будем считать, что она состоит из двух частей: ярма с сечением S из материала с магнитной проницаемостью μ_1 и воздушного зазора, имеющего тоже сечение (рис. 44).

Выделим в этой цепи замкнутый контур и применяя теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля, получим:

$$H_1 \cdot \ell_1 + H_2 \cdot \ell_2 = N \cdot I,$$

Где ℓ_1 – длина ярма, измеренная по средней линии, ℓ_2 – длина воздушного зазора, H_1 – напряженность магнитного поля в ярме, H_2 – в воздушном зазоре, N – число витков в намагничивающей обмотке, I – сила тока в ней. Так как магнитный поток замкнут, то, учитывая, что $B = \frac{\Phi}{S}$ и $H = \frac{B}{\mu\mu_0}$, получим,

$$\frac{\Phi \ell_1}{\mu_1 \mu_0 S} + \frac{\Phi \ell_2}{\mu_2 \mu_0 S} = N \cdot I. \quad 7.16$$

Отсюда

$$\Phi = \frac{NI}{\frac{\ell_1}{\mu_1\mu_0S} + \frac{\ell_2}{\mu_2\mu_0S}}. \quad 7.17$$

Полученное выражение 7.17 подобно закону Ома для замкнутой электрической цепи. Величина $NI = E_m$ играет роль ЭДС и, поэтому получила название магнитодвижущей силы. Величина $R_m = \frac{\ell_1}{\mu_1\mu_0S} + \frac{\ell_2}{\mu_2\mu_0S}$ играет роль полного сопротивления цепи и, поэтому, получила название полного магнитного сопротивления цепи. Теперь выражение 7.17 можно записать в виде:

$$\Phi = \frac{E_m}{R_m}. \quad 7.18$$

Наряду с простой магнитной цепью, на практике приходится встречаться с более сложными магнитными цепями, в которых происходит разветвление магнитных потоков, например цепь, изображенная на рисунке 45.

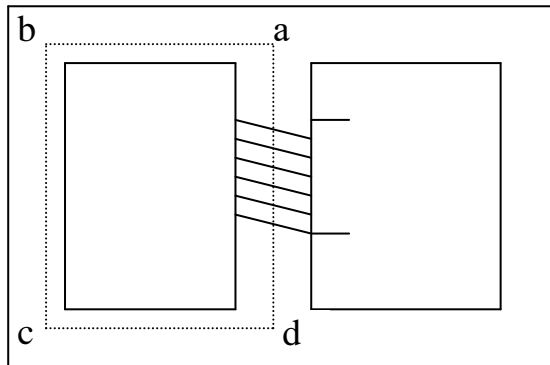


Рис.45. Разветвленная электрическая цепь.

Рассмотрим замкнутый участок abcda, входящий в состав цепи и обозначим длину участка ad через ℓ_1 , его сечение S_1 и напряженность поля в нем H_1 , а соответствующие величины для участка abcd — через ℓ_2, S_2, H_2 . Выразим H_1 и H_2 через Φ , как и в предыдущем случае

$$H_1 = \frac{\Phi}{\mu_1\mu_0S_1}, \quad H_2 = \frac{\Phi}{\mu_2\mu_0S_2},$$

и тогда по теореме о циркуляции вектора напряженности магнитного поля:

$$\frac{\Phi_1\ell_1}{\mu_1\mu_0S_1} + \frac{\Phi_2\ell_2}{\mu_2\mu_0S_2} = NI.$$

С учетом введенных обозначений можно получить:

$$\Phi_1R_1 + \Phi_2R_2 = E_m. \quad 7.19$$

В выделенный контур могут входить не два участка с различными магнитными потоками, а какое угодно их число, и в каждом из них может быть намагничивающая обмотка. Поэтому в общем случае

$$\sum \Phi_k R_{mk} = \sum E_m. \quad 7.20$$

Эта формула имеет тот же вид, что и второе правило Кирхгофа для разветвленных цепей, причем вместо силы тока I , входит магнитный поток Φ , а роль ЭДС и сопротивления R играют магнитодвижущая сила E_m и магнитное сопротивление R_m . Так же как и в случае с токами надо учитывать правило знаков.

Рассмотрим теперь какой-нибудь узел магнитной цепи, в котором сходится не менее трех магнитопроводов. Так как линии магнитной индукции всегда замкнуты, то общее число этих линий идущих к разветвлению, равно числу линий, уходящих от узла разветвления. Или: сумма магнитных потоков направленных к месту разветвления равна сумме магнитных потоков уходящих от него

$$\sum \Phi_k = 0. \quad 7.21$$

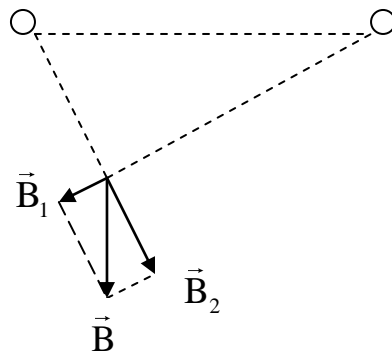
Эта формула имеет тот же вид, что и первое правило Кирхгофа.

Таким образом, задача вычисления магнитных потоков в любой магнитной цепи оказывается аналогичной задаче вычисления токов в электрической цепи, причем каждой магнитной можно сопоставить соответствующую электрическую цепь.

Примеры решения задач

Задача 12. По двум бесконечно длинным прямолинейным проводникам, находящимся на расстоянии 5 см друг от друга в воздухе, текут токи 50 А каждый. Определить индукцию магнитного поля в точке, удаленной на 3 см от первого проводника и на 4 см от второго проводника. Считать, что токи текут в противоположных направлениях.

Дано:
 $I = 60 \text{ А}$
 $r = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$
 $r_1 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$
 $r_2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}$
 $B = ?$



Индукцию магнитного поля, создаваемого двумя проводниками с током, можно найти по принципу суперпозиции полей, $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$. Так как вектора B_1 и B_2 взаимно перпендикулярны (см. условие задачи), то $B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$. Индукция магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным прямолинейным проводником с током, определяется по

формуле $B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}$ и тогда $B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}}$.

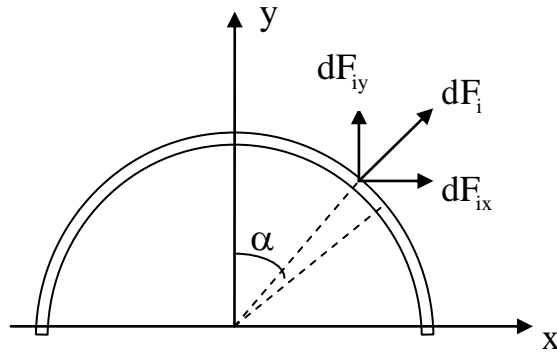
Подставляя числовые значения, найдем $B = \frac{4\pi \cdot 50 \cdot 10^{-7}}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{16 \cdot 10^{-4}} + \frac{1}{9 \cdot 10^{-4}}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ (Тл)}$.

Ответ: $B = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}$.

Задача 13. По тонкому проводу в виде кольца радиусом 20 см течет ток 100 А. Перпендикулярно плоскости кольца возбуждено магнитное поле с индукцией 0,02 Тл. Определить силу, растягивающую кольцо.

Дано:
 $R = 0,2 \text{ м}$
 $I = 100 \text{ А}$
 $B = 0,02 \text{ Тл}$

 $F = ?$



Рассечем кольцо на две равные части и найдем силу, действующую на одну из них. Выделим на проводе элемент длиной $dl = R \cdot d\alpha$. На этот элемент по закону Ампера будет действовать сила $d\vec{F}_i = B \cdot I \cdot dl = B \cdot I \cdot R \cdot d\alpha$. И тогда можно утверждать, что $\vec{F} = \sum d\vec{F}_i$. Разложим вектор $d\vec{F}_i$ на составляющие dF_{ix} и dF_{iy} и тогда в

силу симметрии задачи, можно утверждать, что $\sum d\vec{F}_{ix} = 0$ и $\vec{F} = \sum d\vec{F}_{iy}$. Так как все составляющие $d\vec{F}_{iy}$ направлены в одну сторону, то геометрическое сложение можно заменить алгебраическим и тогда

$$F = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \cdot I \cdot R \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha \Rightarrow$$

$$F = B \cdot I \cdot R \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 2B \cdot I \cdot R.$$

Вычисляя, найдем $B = 2 \cdot 0,02 \cdot 100 \cdot 0,2 = 0,8 \text{ (Н)}$.

Ответ: $F = 0,8 \text{ Н}$.

Задача 14. Плоский квадратный контур со стороной 10 см, по которому течет ток 100 А, свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл. Определить работу, которую надо совершить, чтобы повернуть контур на 180° .

Дано:
 $I = 100 \text{ А}$
 $a = 0,1 \text{ м}$
 $B = 0,1 \text{ Тл}$
 $\alpha_1 = 0$
 $\alpha_2 = 180^\circ$

 $A = ?$

Работа, совершаемая при бесконечно малом перемещении контура с током в магнитном поле, определяется по формуле $dA = I \cdot d\Phi$, где $d\Phi$ - изменение магнитного потока, пронизывающего контур. Так как магнитный поток, пронизывающий контур, определяется по формуле $\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha = B \cdot a^2 \cdot \cos\alpha$, то, дифференцируя данное выражение, можно получить $d\Phi = -B \cdot a^2 \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha$ и, следовательно, $dA = -B \cdot I \cdot a^2 \sin\alpha \cdot d\alpha$. Полную работу найдем, интегрируя полученное выражение

$$A = I \cdot B \cdot a^2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha \cdot d\alpha = B \cdot I \cdot a^2 (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = 2B \cdot I \cdot a^2.$$

Вычисляя, получим $A = 2 \cdot 100 \cdot 0,1 \cdot 0,01 = 0,2 \text{ (Дж)}$.

Ответ: $A = 0,2 \text{ Дж}$.

Задача 15. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов 400 В, попадает в однородное магнитное поле с индукцией 0,01 Тл. Определить: радиус окружности, по которой будет двигаться электрон; период обращения электрона. Вектор скорости электрона перпендикулярен линиям индукции магнитного поля.

Дано: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
 $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг
 $U = 400$ В
 $B = 0,01$ Тл
 $R - ?$
 $T - ?$

На электрон, движущийся в магнитном поле, будет действовать сила Лоренца $F = e \cdot v \cdot B$, но по второму закону Ньютона $F = ma = \frac{mv^2}{R}$ и, тогда, $\frac{mv^2}{R} = e \cdot v \cdot B \Rightarrow$

$$R = \frac{m \cdot v}{e \cdot B}.$$

Кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов, определяется равенством $\frac{mv^2}{2} = eU \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m}}$ и тогда

$R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m \cdot U}{e}}$. Для определения периода обращения воспользуемся формулой $t = \frac{S}{v}$ и, следовательно, $T = \frac{2\pi \cdot R}{v} = \frac{2\pi \cdot m}{e \cdot B}$.

Вычисляя, найдем $R = \frac{1}{0,01} \sqrt{\frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 400}{1,6 \cdot 10^{-19}}} = 6,75 \cdot 10^{-3}$ м,

$T = \frac{6,28 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-2}} = 3,57 \cdot 10^{-9}$ (с).

Ответ: $R = 6,75$ мм, $T = 3,57$ нс.

Задача 16. На стальное кольцо со средним радиусом 0,15 м намотано в один слой 500 витков провода. Определить индукцию магнитного поля в стали и магнитную проницаемость стали, если по обмотке течет ток 0,5 А.

Дано: $R = 0,15$ м
 $N = 500$
 $I = 0,5$ А
 $B - ?$
 $\mu - ?$

Воспользовавшись законом полного тока можно определить напряженность магнитного поля в стали $2\pi \cdot R \cdot H = N \cdot I \Rightarrow H = \frac{N \cdot I}{2\pi \cdot R}$. Подставляя численные значения, получим $H = \frac{500 \cdot 0,5}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,15} = 2660$ А/м.

Используя зависимость $B = f(H)$ для стали (см. рисунок) можно найти, что $B = 1,35$ Тл.

Магнитная проницаемость ферромагнетика связана с магнитной индукцией выражением $\mu = \frac{B}{\mu_0 \cdot H}$. $\mu = \frac{1,35}{12,56 \cdot 10^{-7} \cdot 2,66 \cdot 10^3} = 400$.

Ответ: $B = 1,35 \text{ Тл}$, $\mu = 400$.

132. По контуру в виде равностороннего треугольника со стороной 10 см течет ток 60 А. Определить индукцию магнитного поля в центре треугольника.



Рис. 29.

133. По бесконечно длинному проводнику, изогнутому, так как показано на рисунке 29, течет ток 80 А. Определить

индукцию магнитного поля в центре кривизны, если $r = 10 \text{ см}$.

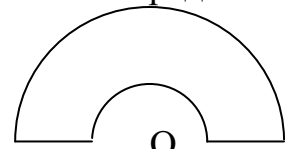


Рис.30

134. По плоскому контуру из тонкого провода течет ток 100А. Определить индукцию магнитного поля создаваемого этим ток в точке О (центр окружностей) (рис. 30). Радиусы кривизны $R_1 = R$, $R_2 = 2R$.

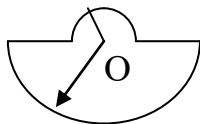


Рис. 31

135. По плоскому контуру из тонкого провода течет ток 100А. Определить индукцию магнитного поля создаваемого этим ток в точке О (центр окружностей) (рис. 31). Радиусы кривизны $R_1 = R$, $R_2 = 2R$.

136. По тонкому проволочному кольцу течет ток. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму правильного треугольника. Во сколько раз изменилась индукция магнитного поля в центре контура?

137. По тонкому проволочному кольцу течет ток. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму квадрата. Во сколько раз изменилась индукция магнитного поля в центре контура?

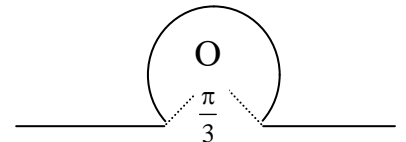


Рис. 32

138. Бесконечно длинный тонкий проводник с током 50 А имеет изгиб (плоскую петлю радиусом 10 см. Определить в точке О (центре окружности) индукцию магнитного поля, создаваемую этим током (рис. 32).

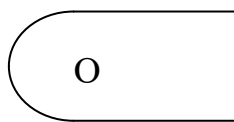


Рис. 33

139. Бесконечно длинный тонкий проводник с током 50 А имеет изгиб (плоскую петлю радиусом 10 см. Определить в точке О (центре петли) индукцию магнитного поля, создаваемую этим током (рис. 33).

140. Бесконечно длинный тонкий проводник с током 50 А имеет изгиб (плоскую петлю радиусом 10 см. Определить в точке О индукцию магнитного поля, создаваемую этим током (рис. 34).

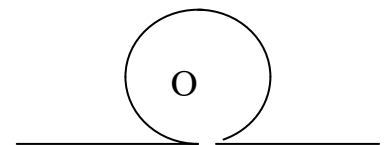


Рис. 34

141. По тонкому проводу, изогнутому в виде правильного треугольника со стороной 20 см течет ток 100 А. Определить индукцию магнитного поля в центре треугольника.

- 142.** По бесконечно длинному проводнику, изогнутому под углом 120° , течет ток 50 А. Определить индукцию магнитного поля в точке С, если $r = 5$ см.

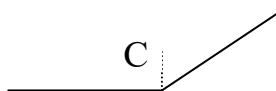


Рис. 35

- 143.** Проводник в виде дуги, равной $\frac{1}{3}$ окружности радиусом 20 см, находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,3 Тл. По проводнику течет ток 20 А. Определить силу, действующую на проводник, если магнитное поле перпендикулярно плоскости, в которой расположен проводник.

- 144.** По тонкому проводу, изогнутому в виде шестиугольника со стороной 10 течет ток 40 А. Определить индукцию магнитного поля в центре шестиугольника.

- 145.** По тонкому проводу, изогнутому в виде прямоугольника со сторонами 30 и 40 см течет ток 60 А. Определить индукцию магнитного поля в центре прямоугольника.

- 146.** Электрон, влетев в однородное магнитное поле с индукцией 0,2 Тл, стал двигаться по окружности радиусом 5 см. Определить магнитный момент эквивалентного кругового тока.

- 147.** Проводник в виде дуги, равной $\frac{1}{4}$ окружности радиусом 20 см, находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,3 Тл. По проводнику течет ток 20 А. Определить силу, действующую на проводник, если магнитное поле перпендикулярно плоскости, в которой расположен проводник.

- 148.** По трем прямолинейным параллельным проводникам, находящихся на одинаковом расстоянии, равном 10 см друг от друга, текут токи 100 А. В двух проводниках направление токов совпадает. Вычислить силу, действующую на единицу длины каждого провода.

- 149.** Заряженная частица, прошедшая ускоряющую разность потенциалов 2 кВ, движется в однородном магнитном поле с индукцией 15,1 Тл по окружности радиусом 1 см. Определить удельный заряд частицы.

- 150.** Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией 9 мТл по винтовой линии, радиус которой 1 см и шаг 7,8 см. Определить период обращения электрона.

- 151.** В однородном магнитном поле с индукцией 2 Тл движется протон по винтовой линии с радиусом 10 см и шагом 60 см. Определить кинетическую энергию протона.

- 152.** Заряженная частица, двигаясь в скрещенных под прямым углом электрическому ($E = 400 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$) и магнитному ($B = 0,25$ Тл) полях, не испытывает отклонения при определенном значении скорости v_0 . Определить эту скорость.

- 153.** Электрон, имеющий кинетическую энергию 1,5 МэВ, движется в однородном магнитном поле по окружности. Индукция магнитного поля 0,02 Тл. Определить период обращения электрона.

154. Протон, прошедший ускоряющую разность потенциалов 800 В, влетает в однородные скрещенные под прямым углом электрическое и магнитное ($B = 50$ мТл) поля. Определить напряженность электрического поля, если протон движется в скрещенных полях прямолинейно.

155. По тонкому проволочному кольцу течет ток. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму правильного шестиугольника. Во сколько раз изменилась индукция магнитного поля в центре контура?

156. В однородном магнитном поле с индукцией 0,1 мТл движется электрон по винтовой линии. Определить скорость электрона, если радиус ее 5 см, а шаг – 20 см.

157. Протон с кинетической энергией 1 МэВ влетел в однородное магнитное поле с индукцией 1 Тл, перпендикулярно линиям индукции. Какова должна быть протяженность поля в направлении, по которому летел протон, чтобы оно изменило направление движения протона на противоположное?

158. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи 1000 А. Определить силу, действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится на расстоянии, равном ее длине.

159. Проводник в виде тонкого полукольца радиусом 10 см находится в однородном магнитном поле с индукцией 50 мТл. По проводнику течет ток 10 А. Найти силу, действующую на проводник, если плоскость кольца перпендикулярна линиям индукции магнитного поля.

160. Длина стального сердечника тороида равна 2,5 м, длина вакуумного зазора 1 см. Число витков в обмотке равно 1000. При силе тока в 20 А индукция магнитного поля в зазоре равна 1,6 Тл. Определить магнитную проницаемость стали.

161. Длина стального сердечника тороида 1 м, воздушного зазора 3 мм. Число витков в обмотке тороида 2000. Найти напряженность магнитного поля в зазоре при силе тока 1 А.

162. Тороид намотан на стальное кольцо сечением 5 см^2 . При силе тока 1 А магнитный поток равен 250 мВб. Определить число витков на единицу длины.

163. Определить ток в обмотке тороида, содержащей 400 витков на единицу длины, необходимого для получения магнитного потока 0,3 мВб в стальном сердечнике, если длина средней линии равна 1,2 м, площадь поперечного сечения тороида равна $2,5\text{ см}^2$.

164. Определить число витков в обмотке тороида при которой в узком вакуумном зазоре длиной 3,6 мм магнитная индукция будет равна 1,4 Тл. Длина тороида по средней линии равна 0,8 м. Сила тока 28 А. Сердечник – сталь.

165. Тороид со стальным сердечником имеет 10 витков на каждый сантиметр длины. По обмотке течет ток 2 А. Вычислить магнитный поток в сердечнике, если его сечение 4 см^2 .

166. Обмотка тороида, имеющего стальной сердечник с узким вакуумным зазором, содержит 1000 витков. По обмотке течет ток 1 А. При какой длине вакуумного зазора индукция магнитного поля в нем будет равна 0,5 Тл? Длина тороида по средней линии равна 1 м.

167. Электромагнит в форме подковы имеет обмотку из 1000 витков, по которой течет ток 20 А. Определить индукцию магнитного поля, если длина средней линии равна 1 м, длина зазора 1 см, а магнитная проницаемость сердечника равна 1000.

168. Электромагнит изготовлен в виде тороида со средней длиной 51 см и имеет вакуумный зазор длиной 2 мм. Обмотка тороида равномерно распределена по его длине. Во сколько раз уменьшится индукция магнитного поля в зазоре, если его длину увеличить в три раза. Магнитная проницаемость сердечника равна 800 и считается постоянной.

169. На стальное кольцо намотано в один слой 500 витков провода. Средний диаметр кольца 25 см. Определить индукцию магнитного поля в стали при силе тока в обмотке равной 2,5 А.

170. Чугунное кольцо имеет воздушный зазор длиной 5 мм. Длина средней линии кольца равна 1 м. Сколько витков содержит обмотка на кольце, если при силе тока 4 А индукция магнитного поля в воздушном зазоре равна 0,5 Тл?

171. Определить индукцию и напряженность магнитного поля на оси тороида без сердечника, по обмотке которого, содержащей 200 витков, идет ток 5 А. Внешний диаметр тороида равен 30 см, внутренний - 20 см. Как изменится ответ, если в тороид поместить стальной сердечник?

172. Плоский контур с током 5 А свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией 0,4 Тл. Площадь контура 100 см^2 . Поддерживая ток в контуре неизменным, его повернули относительно оси, лежащей в плоскости контура, на угол 40° . Определить совершенную при этом работу.

173. По кольцу, сделанному из тонкого гибкого провода радиусом 10 см, течет ток 100 А. Перпендикулярно плоскости кольца возбуждено магнитное поле с индукцией 0,1 Тл. Определить работу внешних сил, которые, действуя на провод, деформировали его и придали ему форму квадрата. Сила тока при этом поддерживалась постоянной.

174. Виток, по которому течет ток 20 А, свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией 0,016 Тл. Диаметр витка равен 20 см. Определить работу, которую надо совершить, чтобы повернуть виток на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно оси, совпадающей с диаметром витка.

Тема 8.3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

1.8.3. Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея.

Ранее мы убедились в том, что электрический ток создает вокруг себя магнитное поле. Существует и обратное явление: магнитное поле вызывает появление электрического тока. В 1831 году М. Фарадей открыл, что

во всяком замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока, через поверхность ограниченную этим контуром, возникает электрический ток.

Это явление получило название электромагнитной индукции, а возникающий ток называется индукционным.

Фарадей на опыте показал, что сила индукционного тока не зависит от способа изменения магнитного потока, а определяется лишь скоростью его изменения, т.е. величиной $\frac{d\Phi}{dt}$. При изменении знака $\frac{d\Phi}{dt}$ меняется и направление индукционного тока.

Возникновение тока в замкнутом контуре свидетельствует о том, что в нем возникает ЭДС, называемая ЭДС индукции. Так как сила индукционного тока пропорциональна скорости изменения магнитного потока, то, следовательно, и ЭДС индукции пропорциональна этой величине (сопротивление контура от магнитного поля не зависит), т.е.

$$E_i \sim \frac{d\Phi}{dt}. \quad 8.1$$

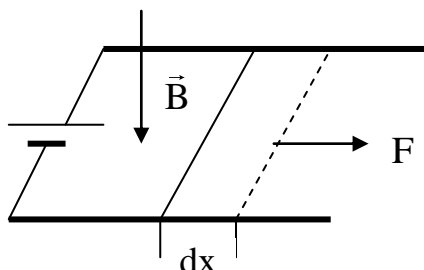


Рис. 46. К выводу закона Фарадея.

Теперь необходимо выяснить знак E_i . Знак магнитного потока (а значит и скорости изменения) зависит от выбора положительного направления нормали к контуру. В свою очередь направление положительной нормали связано с направлением тока в контуре. Пользуясь этими представлениями, Максвелл вывел закон электромагнитной индукции:

какова бы ни была причина изменения магнитного потока, охватываемого замкнутым проводящим контуром, возникающая в контуре ЭДС индукции

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad 8.2$$

Знак минус в формуле 8.2. является математическим выражением правила Ленца:

индукционный ток всегда имеет такое направление, что созданный им магнитный поток препятствует изменению магнитного потока вызвавшего этот ток.

Закон Фарадея легко вывести из закона сохранения энергии. Рассмотрим проводник с током I , помещенный в перпендикулярное магнитное поле с индукцией \vec{B} и способный свободно перемещаться в нем (рис. 46). Под действием силы Ампера F за время dt проводник совершает малое перемещение dx . При этом согласно 5.23 совершается работа $dA_1 = I \cdot d\Phi$ и в проводнике выделяется количество теплоты $dQ = I^2 \cdot R \cdot dt$. За это время источник тока совершает работу $dA = E \cdot I \cdot dt$. Согласно закону сохранения энергии $dA = dQ + dA_1$. Подставляя значения dQ и dA_1 , получим:

$$E \cdot I \cdot dt = I \cdot d\Phi + I^2 \cdot R \cdot dt.$$

Отсюда

$$I = \frac{E - \frac{d\Phi}{dt}}{R}. \quad 8.3$$

Следовательно,

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad 8.4$$

Это и есть закон Фарадея.

Какова природа ЭДС индукции? Если проводник движется в магнитном поле со скоростью v , то сила Лоренца действует на заряды внутри проводника и движущиеся вместе с ним в противоположные стороны. Перемещение зарядов приводит к возникновению в проводнике электрического поля. Очевидно, что перемещение зарядов прекратится тогда, когда сила Лоренца $F_1 = qvB$ будет уравновешена электрической силой $F_2 = qE$, т.е. $qvB = qE$ (рис. 47). Отсюда для напряженности электрического поля в проводнике получим выражение $E = vB$.

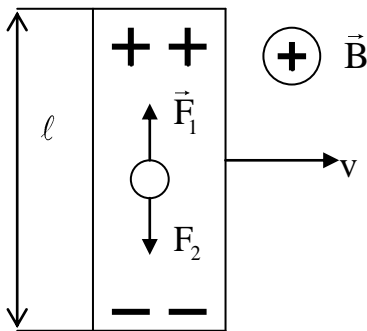


Рис. 47. К возникновению ЭДС индукции в движущемся проводнике.

Разность потенциалов на концах проводника будет равна $\Delta\phi = E\ell = vB\ell$. Следовательно, ЭДС индукции в движущемся проводнике обусловлена действием силы Лоренца и определяется по формуле $E_i = vB\ell$.

Согласно закону Фарадея, возникновение ЭДС индукции в замкнутом контуре, возможно и в неподвижном контуре, находящемся в переменном магнитном поле. Но сила Лоренца на неподвижные заряды не действует и, следовательно, ею нельзя объяснить возникновение ЭДС индукции в неподвижном проводнике Максвелл высказал гипотезу о том, что всякое изменяющееся магнитное поле порождает в окружающем пространстве **вихревое электрическое поле** \vec{E}_B которое и является причиной возникновения ЭДС индукции. Циркуляция вектора напряженности \vec{E}_B этого поля по любому замкнутому контуру внутри проводника и представляет собой ЭДС индукции, т.е.

$$E_i = \oint E_B dl = - \frac{d\Phi}{dt} . \quad 8.5$$

2.8.3. Взаимная индукция. Индуктивность.

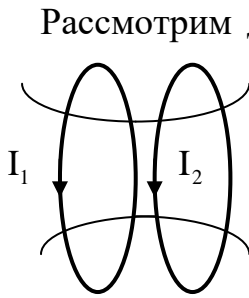


Рис. 48. Взаимная индукция.

Рассмотрим два неподвижных контура I и II, расположенные достаточно близко друг к другу (рис. 48). Если по контуру I протекает ток I_1 , то второй контур будет пронизывать магнитный поток

$$\Phi_{21} = L_{21} \cdot I_1 , \quad 8.6$$

где L_{21} - коэффициент пропорциональности.

Если ток I_1 изменяется, то магнитный поток, пронизывающий второй контур, будет изменяться, и в контуре будет возникать ЭДС индукции

$$E_2 = - \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt} . \quad 8.7$$

Аналогично можно утверждать, что при протекании по второму контуру изменяющегося тока I_2 , в первом контуре будет возникать ЭДС индукции

$$E_1 = - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt} . \quad 8.8$$

Явление возникновения ЭДС индукции в одном из контуров при изменении тока в другом, называется **взаимной индукцией**. Коэффициенты пропорциональности L_{12} , L_{21} называются **взаимной индуктивностью контуров** и зависят от геометрической формы, размеров, взаимного расположения контуров и магнитной проницаемости среды, окружающей контура. В нашем случае $L_{12} = L_{21}$.

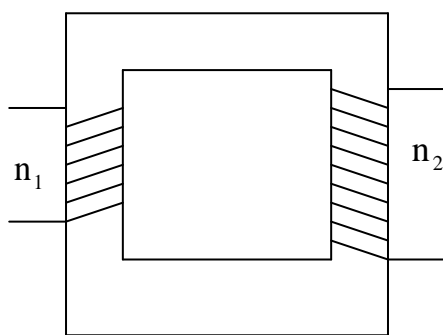


Рис. 49. Трансформатор

Явление взаимной индукции лежит в основе работы трансформатора, применяемого для изменения напряжения переменного тока. Трансформатор был изобретен П.И. Яблочковым и усовершенствован И.Ф. Усагиным.

Первичная и вторичная обмотки трансформатора, имеющие соответственно число витков n_1 и n_2 , закреплены на замкнутом ферромагнитном сердечнике (рис.49). Магнитный поток, создаваемый переменным током, текущим в первичной обмотке, полностью локализован в сердечнике и, поэтому, он будет пронизывать обе обмотки. Изменение магнитного потока вызывает появление ЭДС индукции во вторичной обмотке и ЭДС самоиндукции в первичной. По закону Ома ток в первичной обмотке определяется суммой внешней ЭДС и ЭДС самоиндукции

$$I_1 R_1 = E_1 - n_1 \frac{d\Phi}{dt} . \quad 8.9$$

Так как сопротивление первичной обмотки мало, то $I_1 R_1 \approx 0$ и поэтому

$$E_1 = n_1 \frac{d\Phi}{dt}. \quad 8.10$$

ЭДС индукции, возникающая во вторичной обмотке

$$E_2 = -n_2 \frac{d\Phi}{dt}. \quad 8.11$$

Разделив 8.10 на 8.11, получим

$$\frac{E_1}{E_2} = -\frac{n_1}{n_2} = k. \quad 8.12$$

Знак минус говорит о том, что ЭДС в обмотках противоположны по фазе, k - **коэффициент трансформации**. При $k > 1$ трансформатор понижающий, при $k < 1$ - повышающий.

Пренебрегая потерями энергии на выделение джоулева тепла (КПД трансформатора мало отличается от единицы), и, применяя закон сохранения энергии можно получить

$$U_1 \cdot I_1 = U_2 \cdot I_2 \Rightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} \quad 8.13$$

т.е. повышение напряжения приводит к уменьшению силы тока и наоборот.

Трансформатор, состоящий из одной обмотки, называется автотрансформатором. В этом случае напряжение подается на всю обмотку, а снимается с части ее в понижающем трансформаторе и наоборот в повышающем.

3.8.3. Явление самоиндукции. Индуктивность.

Явление электромагнитной индукции наблюдается во всех случаях, когда изменяется магнитный поток, пронизывающий контур. В частности, этот переменный магнитный поток может создаваться током, текущим в самом контуре. Поэтому

при всяком изменении силы тока в каком-либо контуре, в нем возникает ЭДС индукции, которая вызывает дополнительный ток в контуре. Это явление получило название самоиндукции.

Согласно закону Био-Савара-Лапласа индукция магнитного поля пропорциональна силе тока, вызывающего поле. Следовательно, ток в контуре и созданный им магнитный поток будут связаны между собой, и мы можем написать:

$$\Phi = LI, \quad 8.14$$

где L - коэффициент пропорциональности, получивший название *индуктивности контура*. Индуктивность контура зависит от геометрических размеров и формы контура, а также от магнитных свойств среды окружающей проводник.

Определим индуктивность катушки. Так как магнитный поток, пронизывающий катушку $\Phi = N \cdot B \cdot S$, $B = \mu \cdot \mu_0 \cdot n \cdot I$, то

$$\Phi = \mu \cdot \mu_0 \cdot \frac{N^2}{\ell} \cdot S \cdot I = \mu \cdot \mu_0 \cdot n^2 \cdot V \cdot I. \quad 8.15$$

Сравнивая 8.14 и 8.15, найдем, что

$$L = \mu \cdot \mu_0 \cdot n^2 \cdot V. \quad 8.16$$

Применяя к явлению самоиндукции закон Фарадея, получим для ЭДС самоиндукции

$$E_s = -L \frac{dI}{dt}. \quad 8.17$$

4.8.3. Вихревые токи. Скин – эффект.

Индукционные токи могут возникать и в сплошных массивных проводниках, находящихся в переменном магнитном поле. Плотность тока, в какой – либо точке проводника, по закону Ома, равна $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

Так как линии напряженности вихревого электрического поля замкнуты, то, и линии тока также замыкаются внутри проводника, отчего такие токи получили название вихревых токов или токов Фуко.

Поскольку электрическое сопротивление массивных проводников мало, то вихревые токи могут достигать очень большой силы.

Токи Фуко подчиняются правилу Ленца – они выбирают внутри проводника такие пути и направления, чтобы своим действием сильнее противодействовать

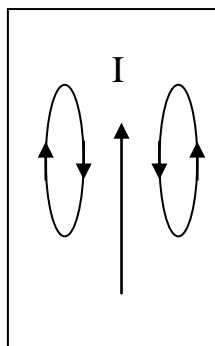


Рис. 50. Скин – эффект.

причине, по которой они вызваны. Поэтому движущиеся в сильном магнитном поле проводники испытывают сильное торможение, обусловленное взаимодействием токов Фуко с магнитным полем.

Этим явлением широко пользуются для успокоения колебаний стрелок электроизмерительных и других приборов.

На подвижной части прибора закрепляется легкая проводящая пластинка в виде сектора, которая вводится в пространство между полюсами постоянного магнита. При движении пластинки в ней возникают токи Фуко, вызывающие торможение системы.

Преимущества такого устройства состоит в том, что торможение возникает только при движении пластины, и отсутствуют, когда пластина неподвижна.

Вихревые токи вызывают нагревание проводников, что нашло широкое применение на практике. Это позволяет плавить металлы в вакууме и получать материалы исключительно высокой чистоты.

Вихревые токи, возникающие в сердечниках трансформаторов, генераторов, электродвигателей вызывают бесполезное нагревание и снижают коэффициент полезного действия.

Силы, вызываемые вихревыми токами и действующие на движущиеся проводники в магнитном поле, используют во многих измерительных приборах (измерительные счетчики, тахометры и т.д.).

Вихревые токи возникают и в проводниках, по которым текут переменные токи. Направление вихревых токов внутри проводника всегда таково, что они противодействуют изменению тока внутри проводника и способствуют этому изменению вблизи поверхности (рис. 50). Таким образом, вследствие возникновения вихревых токов, переменный ток оказывается распределенным по сечению проводника неравномерно – он как бы вытесняется на поверхность проводника. Это явление получило название *скин – эффекта или поверхностного эффекта*.

Если сплошные проводники нагревать токами высокой частоты, то в результате скин–эффекта происходит нагревание только их поверхностного слоя. Меняя частоту тока, можно изменять глубину прогрева металла.

5.8.3. Токи при замыкании и размыкании цепи.

Рассмотрим процесс выключения тока в цепи, содержащей источник тока с ЭДС равной E , сопротивление R и индуктивность L . В замкнутой цепи будет существовать ток $I_0 = \frac{E}{R}$.

При размыкании цепи ток в катушке индуктивности уменьшается, что приводит к возникновению ЭДС самоиндукции $E_s = -L \frac{dI}{dt}$, препятствующей уменьшению тока. Согласно закону Ома

$$IR = -L \frac{dI}{dt}. \quad 8.18$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим:

$$I = C \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}, \quad 8.19$$

где C – постоянная интегрирования, которую можно определить из начальных условий. При $t = 0$ сила тока в цепи равна I_0 и подставляя в 8.19 можно получить, что $C = I_0$ и тогда сила тока при размыкании цепи будет изменяться по закону

$$I = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}. \quad 8.20$$

Промежуток времени τ , в течение которого сила тока в цепи уменьшается в «е» раз получил название времени релаксации. Из 8.20 легко найти, что $\tau = \frac{L}{R}$.

При замыкании цепи помимо внешней ЭДС в цепи возникает ЭДС самоиндукции, и закон Ома запишется в виде:

$$IR = E - L \frac{dI}{dt}. \quad 8.21$$

Введя новую переменную $u = IR - E$, преобразуем уравнение 8.21 к виду

$$\frac{du}{u} = -\frac{dt}{\tau}. \quad 8.22$$

В момент замыкания цепи ($t = 0$) сила тока в цепи $I_0 = 0$ и $u = -E$. Следовательно, интегрируя 8.22 по u (от $-E$ до $IR - E$) и по t (от 0 до t) найдем, что

$$\ln \frac{IR - E}{-E} = -\frac{t}{\tau} \quad \text{или} \quad I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad 8.23$$

где $I_0 = \frac{E}{R}$ - установившийся ток (при $t \rightarrow \infty$).

Из полученных выражений следует, уменьшение и нарастание тока в цепи, содержащей индуктивность, определяется временем релаксации $\tau = \frac{L}{R}$, т.е. установление тока происходит тем быстрее, чем меньше индуктивность цепи и больше ее сопротивление.

6.8.3. Энергия магнитного поля.

Проводники, по которым текут токи, всегда окружены магнитными полями, причем поля исчезают и появляются вместе с исчезновением и появлением электрического тока. Следовательно, часть энергии тока идет на создание магнитного поля, которое подобно электрическому полю, является носителем энергии.

Рассмотрим контур с индуктивностью L , по которому течет ток I . С этим контуром будет связан магнитный поток $\Phi = LI$. При изменении тока на величину dI магнитный поток изменяется на величину $d\Phi = LdI$. Но для изменения магнитного потока на величину $d\Phi$ надо совершить работу $dA = d\Phi \cdot I = L \cdot I \cdot dI$. Интегрируя полученное выражение, для работы тока получим выражение

$$A = \int L \cdot I \cdot dI = \frac{LI^2}{2}. \quad 8.24$$

Следовательно, энергия магнитного поля

$$W = \frac{L \cdot I^2}{2}. \quad 8.25$$

Энергию магнитного поля можно выразить как функцию величин, характеризующих это поле. Рассмотрим частный случай – магнитное поле соленоида. Подставляя в 8.25 выражение 5.11 и, учитывая 5.11 можно получить

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot V. \quad 8.26$$

Так как $B = \mu_0 H$, то окончательно будем иметь

$$W = \frac{BH}{2} \cdot V. \quad 8.27$$

Выражение энергии магнитного поля через характеристики магнитного поля B и H убедительно свидетельствует о том, что энергией обладает само магнитное поле.

Поле в соленоиде однородно и сосредоточено внутри его и, следовательно, энергия 8.27 сосредоточена в объеме соленоида и распределена в нем с объемной плотностью

$$w = \frac{B \cdot H}{2}. \quad 8.28$$

Тот факт, что объемная плотность энергии выражается через основные характеристики магнитного поля, говорит о том, что само магнитное поле обладает энергией.

Формула 8.28 выведена нами для однородного поля, но она справедлива и для неоднородных сред. Выражение 8.28 справедливо лишь для тех сред, для которых зависимость B от H линейна, т.е. она относится только к диа- и парамагнетикам.

Тема 9.3. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Для того чтобы лучше понять значение теории Максвелла, необходимо вспомнить последовательность основных открытий в области электродинамики до Максвелла.

Количественное изучение электрических явлений началось с работ Кулона (1785 г.) установившего сначала закон взаимодействия электрических зарядов и распространивший его потом на взаимодействие магнитных зарядов. Однако до 1820 года электрические и магнитные явления рассматривались как различные явления, не связанные между собой.

Открытие Эрстедом (1820 г.) магнитного действия тока, показало, что электрические и магнитные явления связаны между собой. Особое значение имело открытие Фарадеем (1831 г.) явления электромагнитной индукции. Фарадей исходил из основной идеи о взаимной связи явлений природы.

Второй важной идеей в работах Фарадея было признание решающей роли промежуточной среды в электрических и магнитных явлениях. Фарадей не признавал действия на расстоянии, которое, как мы сейчас хорошо знаем, физически бессодержательно, а считал, что электрические и магнитные взаимодействия передаются промежуточной средой от точки к точке и, что именно в этой среде разыгрываются основные электрические и магнитные процессы.

Во введении к своему трактату Максвелл писал: *"Если мы примем эту среду в качестве гипотезы, я считал, что она должна занимать выдающееся место в наших исследованиях и, что нам следовало бы попытаться сконструировать рациональное представление о всех деталях ее действия, что и было моей постоянной целью в этом трактате."*

В работах Максвелла идеи Фарадея подверглись дальнейшему углублению и развитию и были превращены в строгую математическую теорию. Дюэм писал: «Никакая логическая необходимость не толкала Максвелла придумывать новую электродинамику; он руководствовался лишь некоторыми аналогиями и желанием завершить работу Фарадея в таком же духе, как труды Кулона и Пуассона были завершены электродинамикой Ампера, а также возможно интуитивным ощущением электромагнитной природы света.»

В теории Максвелла мысль о тесной связи электрических и магнитных явлений получила окончательное оформление в виде двух основных положений теории и была в строгой форме выражена в виде уравнений Максвелла.

Приступая к изучению труда Фарадея, - писал Максвелл, - я установил, что его метод понимания явлений был также математическим, хотя и не представлен в форме обычных математических символов. Я также нашел, этот метод можно выразить в обычной математической форме и, таким образом, сравнить с методами профессиональных математиков..... Когда я переводил то, что считал идеями Фарадея, в математическую форму, я нашел, что в большинстве случаев результаты обоих методов совпадали, так, что ими объяснялись одни и те же явления и выводились одни и те же законы действия.

1.9.3. Вихревое электрическое поле. Первое уравнение Максвелла в интегральной форме.

Из закона Фарадея для электромагнитной индукции $E_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ следует, что

любое изменение магнитного потока, сцепленного с замкнутым контуром, приводит к возникновению в нем электрического тока. Однако ЭДС возникает только в том случае, если в цепи действуют силы не электростатического характера. Поэтому возникает вопрос о природе сторонних сил в этом случае.

Опыт показывает, что эти силы не связаны ни с тепловыми, ни с химическими процессами в контуре, их нельзя объяснить с помощью силы Лоренца.

Анализируя явление электромагнитной индукции, Максвелл высказал гипотезу о том, что переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле, которое и является причиной возникновения ЭДС индукции. Контур, в данном случае, играет вспомогательную роль, позволяя обнаружить это поле.

Существенная особенность рассматриваемого явления состоит в том, что возникающее электрическое поле не является электростатическим. Работа сил электростатического поля на замкнутом пути равна нулю и поэтому оно не может поддерживать движение зарядов по замкнутому пути, и, следовательно, не может привести к возникновению ЭДС. Электрическое поле, возникающее при электромагнитной индукции, является вихревым полем. Такое поле вызывается в

замкнутом проводнике движение электронов, что приводит к возникновению ЭДС. Сторонними силами являются силы вихревого электрического поля.

По Максвеллу, циркуляция вектора \vec{E}_B этого поля и есть ЭДС индукции, т.е.

$$\oint \vec{E}_B d\vec{\ell} = E_i. \quad 9.1$$

Следовательно, закон электромагнитной индукции можно записать в виде:

$$\oint \vec{E}_B d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad 9.2$$

Ранее мы показали, что для электростатического поля

$$\oint \vec{E}_q d\vec{\ell} = 0, \quad 9.3$$

и, следовательно, эти поля заметно отличаются друг от друга. Электрическое поле, создаваемое переменным магнитным полем, получило название **вихревого электрического поля**. Линии напряженности этого поля являются замкнутыми.

Согласно принципу суперпозиции полей напряженность результирующего электрического поля будет определяться выражением $\vec{E} = \vec{E}_B + \vec{E}_q$ и тогда, суммируя выражения 9.2 и 9.3 для циркуляции вектора напряженности результирующего поля получим

$$\oint \vec{E} d\ell = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad 9.4$$

Преобразуем полученное уравнение. Так как $\Phi = \int_s B dS$, то

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_s B dS = \int_s \frac{dB}{dt} dS. \quad 9.5$$

С учетом 9.5 выражение 9.4 примет вид

$$\oint_{\ell} \vec{E} d\ell = -\int_s \frac{dB}{dt} dS. \quad 9.6$$

Это и есть первое уравнение Максвелла в интегральной форме.

2.9.3. Ток смещения. Интегральная форма второго уравнения Максвелла.

Из явления электромагнитной индукции вытекает, что переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле. Основная идея Максвелла состояла в том, что между электрическим и магнитным полем существует и обратная связь, т.е. переменное электрическое поле должно приводить к возникновению магнитного поля.

В случае стационарного (постоянного во времени) магнитного поля мы показали, что

$$\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I. \quad 9.7$$

Преобразуем полученное уравнение по теореме Стокса. Так как $I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$,

то $\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$, но по теореме Стокса

$$\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \text{rot} \vec{H} \cdot d\mathbf{S}. \text{ Следовательно,}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}. \quad 9.8$$

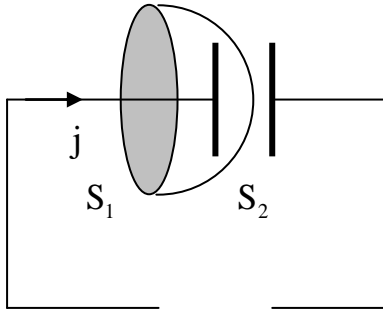


Рис. 51. К введению тока смещения
 конденсатор. Выделим некоторую поверхность S_1 , замкнутой кривой так, чтобы проводник с током пронизывал эту поверхность (рис. 51). Тогда и для переменного тока будет справедлива формула 9.8. Но для поверхности S_2 опирающейся на ту же кривую, это равенство не выполняется, так как поверхность током не пронизывается. Напрашивается вывод о том, что в уравнении 9.8 отсутствует слагаемое, зависящее от производных полей по времени. В случае стационарных полей эта производная равна нулю.

Чтобы согласовать уравнения для постоянных и переменных полей, Максвелл ввел понятие тока смещения.

Между обкладками конденсатора существует переменное электрическое поле, поэтому через него «протекает **ток смещения**». По Максвеллу «ток смещения» (переменное электрическое поле) протекает в тех участках цепи, где нет проводников.

По Максвеллу, переменное электрическое поле (ток смещения) в конденсаторе в каждый момент времени создает такое магнитное поле, как если бы между обкладками конденсатора протекал бы ток проводимости силой, равной силе тока в подводящих проводах. Тогда можно утверждать, что плотность тока смещения равна плотности тока проводимости.

Плотность тока проводимости вблизи конденсатора будет равна

$$\mathbf{j} = \frac{I}{S} = \frac{1}{S} \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{q}{S} \right) = \frac{d\sigma}{dt},$$

где σ - поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора.

Ранее мы показали, что для электрического поля в конденсаторе справедливо равенство $\sigma = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E = D$. Учитывая это для плотности тока смещения можно получить выражение

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{dD}{dt}.$$

Так как направление векторов \vec{j} , $\vec{j}_{\text{см}}$, \vec{E} совпадают, то последнее выражение можно записать в виде

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad 9.9$$

Обратим внимание на то, что ток смещения эквивалентен току проводимости только по способности создавать магнитное поле.

Для электрического поля $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{p}$ и, следовательно,

$$\vec{j}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} + \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad 9.10$$

где $\epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$ - плотность тока смещения в вакууме, $\frac{d\vec{p}}{dt}$ - плотность тока поляризации. Возбуждение магнитного поля током поляризации правомерно, так как токи поляризации ничем не отличаются от токов проводимости. Но тот факт, что и другая составляющая тока смещения ($\epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$), не связанная с движением зарядов, а обусловленная только изменением электрического поля во времени, также вызывает магнитное поле, является принципиально новым утверждением Максвелла.

Существование токов смещения было подтверждено опытами А.А.Эйхенвальда.

В общем случае токи проводимости и токи смещения в пространстве не разделимы, они находятся в одном и том же объеме. Поэтому Максвелл ввел понятие полного тока, равного сумме тока проводимости и тока смещения. Плотность полного тока

$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{см}} = \vec{j}_{\text{см}} + \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad 9.11$$

Вводя понятие полного тока, Максвелл по новому подошел к рассмотрению вопроса о замкнутости цепей переменного тока. По Максвеллу, полный ток всегда замкнут, т.е. на концах проводников обрывается лишь ток проводимости, а в диэлектрике имеется ток смещения, который и замыкает ток проводимости.

Максвелл обобщил теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля, введя в правую часть выражения ток смещения

$$\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \oint_S \left(\vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) dS. \quad 9.12$$

Это и есть второе уравнение Максвелла в интегральной форме. Выражение 9.12 справедливо всегда, свидетельством чего является полное совпадение теории и опыта.

3.9.3. Полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений. Эта теория не только объяснила все известные к этому времени экспериментальные факты, но и предсказала ряд новых явлений, существование которых подтвердилось в последствии.

Основу этой теории составляют уравнения Максвелла, которые в электродинамике играют ту же роль, что и законы Ньютона в механике, или основные начала в термодинамике.

Полная система уравнений Максвелла в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= -\int_s \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} & \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \int_v \rho \cdot dV \\ \oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} &= \int_s \left(\vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) \cdot d\vec{S} & \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \end{aligned} \quad 9.13$$

Величины, входящие в эти уравнения не являются независимыми и между ними существует следующая связь:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma\vec{E},$$

где ε_0 , μ_0 - соответственно электрическая и магнитная постоянные, ε , μ - диэлектрическая и магнитная проницаемости вещества, γ - удельная проводимость вещества.

Из уравнений Максвелла вытекает, что электрические поля могут создаваться либо электрическими зарядами, либо изменяющимся во времени магнитным полем. Источником магнитного поля могут быть либо движущиеся электрические заряды (ток), либо переменное электрическое поле.

Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрических и магнитных полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, а магнитных зарядов нет.

Используя теоремы Остроградского-Гаусса и Стокса можно представить полную систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{d\vec{B}}{dt} & \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \\ \text{div } \vec{D} &= \rho & \text{div } \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad 9.14$$

Если заряды и токи в пространстве распределены непрерывно, то обе формы уравнений Максвелла эквивалентны. В случае, когда в среде имеются поверхности разрыва, т.е. поверхности, на которых свойства среды изменяются скачкообразно, то интегральная форма является более общей.

Для стационарных полей (не изменяющихся во времени) уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= 0 & \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} \\ \text{div } \vec{D} &= \rho & \text{div } \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

и в интегральной форме

$$\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV$$

$$\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

В этом случае электрические и магнитные поля оказываются независимыми, что и позволяет изучать отдельно постоянное электрическое и магнитное поля.

Из уравнений Максвелла следует, что переменное магнитное поле всегда связано с порождаемым им электрическим полем, а переменное электрическое поле всегда связано с порождаемым им магнитным полем, т.е. электрические и магнитные поля неразрывно связаны друг с другом – они образуют единое электромагнитное поле.

Теория Максвелла является макроскопической, так как рассматривает поля создаваемые макроскопическими токами и зарядами. Поэтому эта теория не могла вскрыть внутреннего механизма явлений, которые происходят в среде и приводят к возникновению электромагнитного поля. Дальнейшим развитием теории Максвелла стала электронная теория Лоренца.

Одним из важнейших выводов теории Максвелла явилось предсказание существования электромагнитных волн – изменяющегося электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью.

Тема 10.3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

1.10.3. Образование свободной электромагнитной волны.

Предположим, что в некоторой точке О бесконечной непроводящей среды возникает электрическое поле \vec{E} . Так как в среде, электрических зарядов поддерживающих это поле нет, то оно будет исчезать. Но убывающее поле \vec{E} , согласно теории Максвелла, вызывает появление магнитного поля \vec{H} . Но в среде нет постоянных токов, поддерживающих это поле, и оно будет исчезать, и вызывать появление электрического поля \vec{E}_1 . Электрическое поле \vec{E}_1 уничтожит поле в точке О, но проявится в соседней точке 1. Исчезая в точке 1 электрическое поле \vec{E}_1 , вызовет появление магнитного поля \vec{H}_1 , которое будет направлено, так же как и поле \vec{H} . Поэтому оно уничтожит поле \vec{H} в точке 1, но проявится в более удаленной точке 2. Исчезая, оно вызовет появление поля \vec{E}_2 , которое уничтожит поле в точке 2, но проявится в более удаленной точке 3 и т.д. Таким образом, вместо первоначального поля \vec{E} мы получили взаимосвязанные электрическое

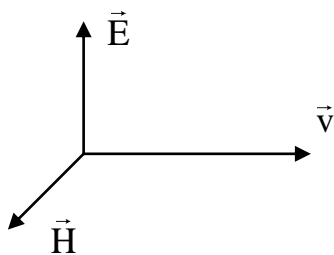


Рис. 52. Электромагнитная волна.

и поле \vec{H} . Поэтому оно уничтожит поле \vec{H} в точке 1, но проявится в более удаленной точке 2. Исчезая, оно вызовет появление поля \vec{E}_2 , которое уничтожит поле в точке 2, но проявится в более удаленной точке 3 и т.д. Таким образом, вместо первоначального поля \vec{E} мы получили взаимосвязанные электрическое

и магнитное поля, распространяющиеся в пространстве, т.е. электромагнитную волну. При этом вектора \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны и перпендикулярны скорости распространения волны \vec{v} . Векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{v} образуют право винтовую систему (рис. 52).

Докажем теперь, что вектора \vec{E} и \vec{H} удовлетворяют волновому уравнению вида

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad 10.1$$

Так в рассматриваемом случае векторы \vec{E} и \vec{H} зависят только от одной координаты и времени, то уравнения Максвелла можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= -\frac{\partial \vec{H}}{\partial x} \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \end{aligned} \quad 10.2$$

Исключим из уравнений 10.2 напряженность магнитного поля \vec{H} . Для этого умножим первое уравнение на $\mu\mu_0$ и продифференцируем его один раз по времени и получим:

$$\mu\mu_0 \cdot \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x \cdot \partial t}. \quad 10.3$$

Второе уравнение продифференцируем один раз по координате «х»:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x \cdot \partial t}. \quad 10.4$$

Из равенства правых частей уравнений 10.3 и 10.4 следует, что

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\mu_0 \cdot \varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}. \quad 10.5$$

Точно такое же уравнение можно получить и для вектора \vec{H} , если из уравнений 10.2 исключить напряженность электрического поля \vec{E} . Но уравнение 10.5 есть волновое уравнение вида 10.1. Отсюда следует, что электрическое и магнитное поле распространяются в пространстве в виде электромагнитной волны. Скорость распространения волны в вакууме ($\mu = 1, \varepsilon = 1$)

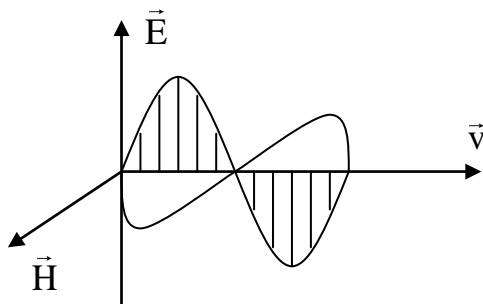


Рис. 53. Векторы E и H в электромагнитной волне.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

а в среде

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}. \quad 10.6$$

Можно показать, что в распространяющейся электромагнитной волне векторы \vec{E} и \vec{H} пропорциональны друг другу, т.е.

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \vec{E} = \sqrt{\mu\mu_0} \cdot \vec{H}. \quad 10.7$$

Из уравнения 10.7 следует, векторы \vec{E} и \vec{H} одновременно достигают максимума и одновременно обращаются в нуль, т.е. колеблются в одинаковой фазе (рис. 53).

2.10.3. Экспериментальное исследование электромагнитных волн.

Свободные электромагнитные волны были впервые получены на опыте Герцем в 1888 году.

Колебательный контур состоящий из индуктивности L и конденсатора C, не годится для получения электромагнитных волн, так как электрическое поле сосредоточено между пластинами конденсатора, а магнитное поле – внутри катушки. В пространстве, окружающем конденсатор и катушку полей практически нет, поэтому заметного излучения электромагнитных волн не происходит. Чтобы излучение играло заметную роль, нужно сделать области, в которых возникают поля, менее обособленными от окружающего пространства. Этого можно достигнуть, увеличивая расстояние между обкладками конденсатора и витками катушки. В пределе мы приходим к вибратору Герца, представляющим

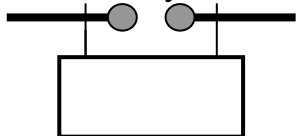


Рис. 54. Вибратор Герца

собой прямолинейный проводник, разделенный искровым промежутком (рис. 54).

Для возбуждения колебаний вибратор Герца подключается к индуктору (источнику высокого напряжения). Когда напряжение на искровом промежутке достигало пробойного значения, возникала искра, которая и замыкала цепь. В результате возникали свободные колебания, которые продолжались до тех пор, пока искра не гасла.

Для приема электромагнитных волн Герц использовал второй такой же вибратор, т.е. электрический резонанс.

На опытах Герц наблюдал отражение, преломление и поляризацию электромагнитных волн и определил скорость распространения электромагнитных волн, которая оказалась равной скорости света.

3.10.3. Энергия электромагнитной волны. Вектор Умова - Пойнтинга.

Возможность экспериментального обнаружения электромагнитных волн указывает на то, что эти волны переносят энергию. Ранее мы показали, что перенос энергии волной можно характеризовать вектором плотности потока энергии. Он определяется количеством энергии, переносимой волной в единицу времени через единицу площади поверхности, перпендикулярной к направлению, в котором переносится энергия. Плотность потока энергии определяется

произведением объемной плотности энергии волны на скорость распространения волны.

Объемная плотность энергии в электромагнитной волне определяется как сумма объемной плотности энергии электрического и магнитного полей:

$$w = w_e + w_m = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \quad 10.8$$

Учитывая выражение 10.7, получим, что объемная плотность энергии электромагнитной волны

$$w = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\mu\mu_0} \cdot E \cdot H. \quad 10.9$$

Умножив 10.9, на скорость распространения электромагнитной волны получим, что плотность потока энергии электромагнитной волны

$$S = E \cdot H. \quad 10.10$$

Так как векторы \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны и образуют с направлением скорости правовинтовую систему, то направление вектора $[\vec{E}\vec{H}]$ совпадает с направлением скорости электромагнитной волны. Следовательно, вектор плотности потока энергии электромагнитной волны

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}].$$

Вектор \vec{S} называется вектором **Умова – Пойнтинга**.

Из теории Максвелла следует, что электромагнитные волны, падающие на некоторую поверхность, должны оказывать на нее давление. В 1900 году П.Н. Лебедев на опыте доказал существование этого давления на твердые тела, а в 1910 году и на газы.

Существование давления электромагнитных волн приводит к выводу о том, что электромагнитному излучению присущ определенный импульс, определяемый выражением

$$\vec{p} = \frac{W}{c},$$

где W – энергия электромагнитной волны.

Тема 11.3. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР (ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ)

1.11.3. Свободные электромагнитные колебания. Формула Томсона.

В механике мы рассматривали систему (груз, подвешенный к пружине) способную совершать гармонические колебания. Когда груз находится в крайних положениях, его кинетическая энергия равна нулю, а потенциальная энергия максимальна. При прохождении грузом положения равновесия, напротив, кинетическая энергия максимальна, а потенциальная энергия равна нулю. По-

этому можно сказать, что механическое колебание есть периодическое превращение энергии системы из кинетической в потенциальную и наоборот.

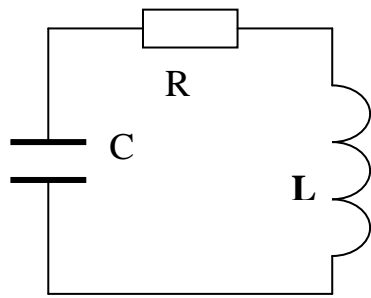


Рис. 55. Колебательный контур

Аналогичные процессы мы имеем и при электромагнитных колебаниях. Электромагнитные колебания, как и механические, могут возникать только в определенных системах. Простейшей системой, в которой могут возникать электромагнитные колебания является **колебательный контур**. Колебательный контур – это электрическая цепь, состоящая из последовательно соединенных катушки индуктивности L , конденсатора C и активного сопротивления R (рис. 55).

Различают **линейные и нелинейные** контура. В линейных контурах его параметры L , C , R не зависят от интенсивности колебаний и период колебаний не зависит от амплитуды (изохронность колебаний). В нелинейных контурах, например, при наличии катушки с ферромагнитным сердечником, изохронность не соблюдается.

Если при разомкнутой цепи зарядить конденсатор, то он будет обладать энергией $\left(W = \frac{q^2}{2C} \right)$. При замыкании заряженного конденсатора на катушку

индуктивности в цепи возникает электрический ток и заряд конденсатора начнет уменьшаться. Через четверть периода заряд конденсатора станет равным нулю, но сила тока в цепи достигает максимального значения и магнитное поле

в катушке будет обладать энергией $\left(W = \frac{LI^2}{2} \right)$. Затем ток в цепи начнет

уменьшаться, но возникающая при этом ЭДС самоиндукции будет поддерживать уменьшающийся ток, что приводит к перезарядке конденсатора и образо-

ванию энергии электрического поля $\left(W = \frac{q^2}{2C} \right)$.

Если сопротивление контура R равно нулю (идеальный контур), то указанный процесс периодического превращения энергии электрического поля $\left(W = \frac{q^2}{2C} \right)$ в энергию магнитного поля $\left(W = \frac{LI^2}{2} \right)$ и обратно будет продолжаться неограниченно долго, и мы получим незатухающие электромагнитные колебания.

Из сопоставления электромагнитных и механических колебаний следует, что энергия электрического поля $\left(W = \frac{q^2}{2C} \right)$ аналогична потенциальной энергии

$\left(\frac{kx^2}{2} \right)$, а энергия магнитного поля $\left(W = \frac{LI^2}{2} \right)$ аналогична кинетической энер-

гии $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$. Из этой аналогии следует, что индуктивность L играет роль массы

m , величина обратная емкости $\frac{1}{C}$ играет роль коэффициента жесткости k , заря-

ду q соответствует смещение x , силе тока $I = \frac{dq}{dt}$, скорость $v = \frac{dx}{dt}$.

Докажем, что эта аналогия распространяется и на описывающие их уравнения.

Так как сопротивление контура равно нулю, то закон Ома для неоднородного участка цепи запишется в виде:

$$\varphi_1 - \varphi_2 + E = 0. \quad 11.1$$

Учитывая, что

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -U = -\frac{q}{C}, \quad E = -L \frac{dI}{dt}, \quad 11.2$$

получим:

$$\frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0. \quad 11.3$$

Разделив 11.3 на L и учитывая, что $\frac{dI}{dt} = q''$ получим уравнение

$$q'' + \frac{1}{LC}q = 0. \quad 11.4$$

Если ввести обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad 11.5$$

уравнение 11.4 примет вид:

$$q'' + \omega_0^2 \cdot q = 0. \quad 11.6$$

Уравнение 11.5 аналогично уравнению, описывающему механические колебания груза на пружине. Решением этого однородного дифференциального уравнения является функция

$$q = q_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad 11.7$$

Таким образом, заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой определяемой выражением 11.5. Эта частота называется собственной частотой колебаний контура. Для периода колебаний в колебательном контуре получается формула

$$T = 2\pi\sqrt{LC}, \quad 11.8$$

называемая **формулой Томсона**.

2.11.3. Свободные затухающие колебания.

Всякий реальный колебательный контур обладает сопротивлением. Это приводит к тому, что часть энергии, запасенная в контуре, теряется на нагревание проводников и поэтому свободные колебания являются затухающими. Закон Ома для неоднородного участка цепи в этом случае будет иметь вид:

$$IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt}. \quad 11.9$$

Разделив 11.9, на L и заменив $I = \frac{dq}{dt}$ и

$\frac{dI}{dt} = q''$, получим уравнение:

$$q'' + \frac{R}{L} \cdot q' + \frac{1}{LC} \cdot q = 0. \quad 11.10$$

Учтя 11.5 и введя обозначение

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad 11.11$$

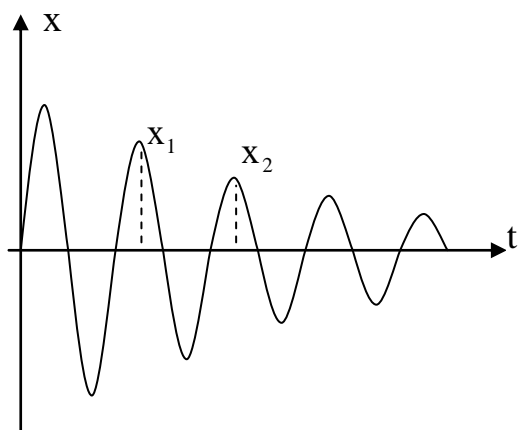


Рис. 56. Затухающие колебания.

уравнению 11.10 можно придать вид:

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = 0. \quad 11.12$$

При условии, что $\beta^2 \ll \omega_0^2$, решение этого уравнения имеет вид:

$$q = q_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha), \quad 11.13$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Выражение 11.13 описывает гармонические колебания с частотой ω , амплитуда которых не остается постоянной, а уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону (рис.56). Показатель β называется коэффициентом затухания.

Найдем промежуток времени τ , в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в «e» раз.

$$\frac{q_0 e^{-\beta t}}{q_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e \quad \text{или} \quad e^{\beta \tau} = e$$

Отсюда следует, что $\beta = \frac{1}{\tau}$, т.е. коэффициент затухания равен величине об-

ратной промежутку времени τ , в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в «e» раз. Этот промежуток времени получил название времени релаксации.

Затухание колебаний принято характеризовать логарифмическим декрементом затухания λ . **Логарифмическим декрементом затухания λ называется натуральный логарифм отношения двух соседних амплитуд, отстоящих друг от друга на один период** (рис. 56):

$$\lambda = \ln \frac{q_0 e^{-\beta t}}{q_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T. \quad 11.14$$

Легко показать, что логарифмический декремент затухания λ обратен по величине числу колебаний N_e , совершаемых за время τ , в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в «е» раз.

$$\lambda = \beta T = \frac{1}{\tau} \cdot T = \frac{1}{\frac{\tau}{T}} = \frac{1}{N_e}. \quad 11.15$$

Гораздо чаще качество колебательного контура характеризуют его **добротностью** Q , которая определяется по формуле

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} \quad 11.16$$

и характеризует потери энергии ΔE в системе за одно полное колебание.

Так как энергия колебания пропорциональна квадрату амплитуды, то для затухающих колебаний будем иметь $E = E_0 \cdot e^{-2\beta t}$. Дифференцируя данное выражение можно найти скорость изменения энергии системы

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta E_0 \cdot e^{-2\beta t} = -2\beta E.$$

Если затухание в системе достаточно мало, то изменение энергии системы за время равное периоду колебания можно найти по формуле $\Delta E = -2\beta \cdot E \cdot T$. Приняв во внимание выражения 11.14 и 11.16, придем к соотношению

$$\frac{E}{\Delta E} = \frac{Q}{2\pi}. \quad 11.17$$

Из выражения 11.17 следует, что при слабом затухании колебаний добротность, с точностью до множителя 2π , равна отношению энергии запасенной в системе в данный момент времени, к убыли этой энергии за одно полное колебание.

Из формулы 11.16 с учетом 11.14 следует, что

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{1}{2\beta} \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{\omega}{2\beta}.$$

Если $\beta^2 \ll \omega^2$, то $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и тогда

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad 11.18$$

Если условие $\beta^2 \ll \omega^2$ не выполняется, то вместо колебаний происходит аperiodический разряд конденсатора.

3.11.3. Вынужденные колебания.

Чтобы вызвать вынужденные колебания, нужно оказывать на систему

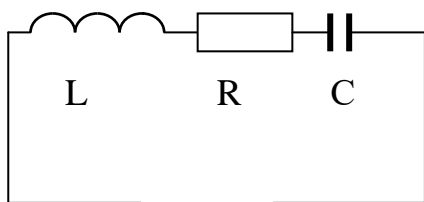


Рис. 57. Возбуждение вынужденных колебаний

внешнее периодически изменяющееся воздействие. В случае электромагнитных колебаний это можно осуществить, если включить последовательно с элементами контура ЭДС, которая изменяется по гармоническому закону $u = U_m \cos \omega t$ (рис. 57).

Закон Ома для неоднородного участка цепи в этом случае запишется в виде:

$$IR + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t. \quad 11.19$$

Переходя от тока I к заряду q и используя подстановки 11.5 и 11.11, получим

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t. \quad 11.20$$

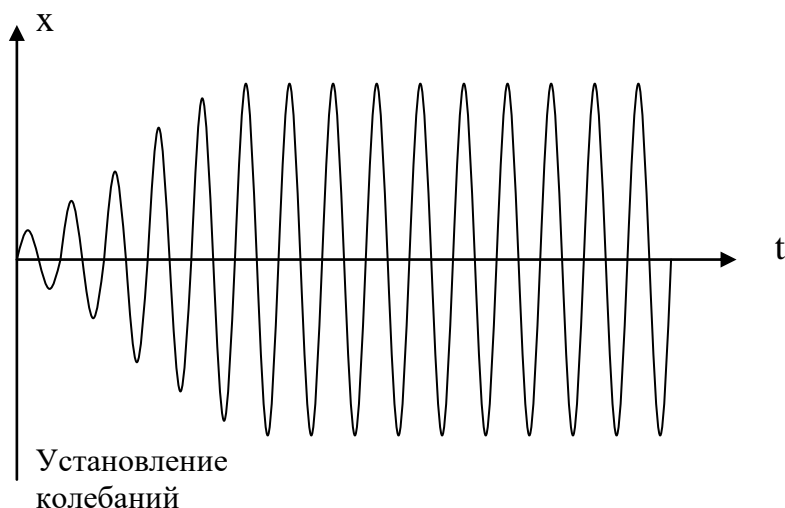
Решение этого неоднородного дифференциального уравнения надо искать в виде суммы двух слагаемых:

1. $q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \alpha)$ где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$
2. $q = q_m \cos(\omega t + \alpha),$

где

$$q_m = \frac{U_m}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad 11.21$$

Первое слагаемое описывает поведение системы на начальном этапе (установление колебаний) и



Установление колебаний

Рис. 58. Вынужденные колебания

при достаточно большом t им можно пренебречь. Следовательно, второе решение описывает установившиеся вынужденные колебания (см. рис. 58).

Из формулы 11.21 следует, что амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты внешнего воздействия ω . Легко показать, что резонансная частота будет

определяться выражением:

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

и в случае малого затухания можно считать, что $\omega_p = \omega_0$.

При резонансе напряжение на конденсаторе будет равно напряжению на индуктивности и равно:

$$U_C = q_m C = U_m \cdot \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = U_m \cdot Q,$$

т.е. будет превышать приложенное напряжение в Q раз.

Мы рассмотрели вынужденные колебания, возникающие при последовательном включении источника внешнего напряжения. Очевидно, что вынужденные колебания можно осуществить, включив источник тока параллельно элементам контура. Резонансная частота в этом случае также будет равна собственной частоте колебаний.

4.11.3. Переменный электрический ток. Действующее значение переменного тока и напряжения.

Установившиеся вынужденные электрические колебания можно рассматривать как протекание в цепи переменного тока, обусловленного переменным напряжением $u = U_m \cos \omega \cdot t$.

Дифференцируя по времени, равенство 11.21, найдем установившуюся силу тока в цепи

$$i = -\omega \cdot q_m \sin(\omega t + \alpha) = \omega \cdot q_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = I_m \cos(\omega t + \varphi), \quad 11.22$$

где

$$I_m = q_m \cdot \omega = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad 11.23$$

а

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \quad 11.24$$

где φ - сдвиг фаз между током и напряжением.

Далее мы будем рассматривать только такие токи, сила которых изменяется по синусоидальному закону, т.е. $i = i_m \sin(\omega t + \varphi)$.

Это объясняется несколькими причинами. Во-первых, все технические генераторы переменного тока имеют ЭДС, изменяющуюся по закону, очень близкому к синусоидальному, и потому создаваемые ими токи изменяются по указанному закону.

Вторая причина заключается в том, что теория таких токов особенно проста, и поэтому на примере таких токов можно очень просто выяснить основные особенности электромагнитных колебаний.

Третья причина заключается в том, что колебания более сложной формы можно представить в виде суммы синусоидальных колебаний (теорема Фурье). Таким образом, гармонические колебания являются самым важным, и самым простым типом колебаний.

Везде в дальнейшем мы будем считать, что колебания являются установившимися, т.е. сила тока и напряжения достигли постоянного значения.

Мгновенное значение мощности, выделяемой в цепи, равно произведению мгновенных значений тока и напряжения

$$p(t) = i \cdot u = I_m \cdot U_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cos \omega t. \quad 11.25$$

Преобразуя это выражение можно получить

$$p(t) = \frac{I_m \cdot U_m}{2} (\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi). \quad 11.26$$

Практический интерес имеет среднее по времени значение $p(t)$. Так как среднее значение $\cos(2(\omega t + \varphi)) = 0$, то

$$p = \frac{I_m U_m}{2} \cos \varphi = \frac{U_m \cdot I_m}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cos \varphi = UI \cos \varphi. \quad 11.27$$

Величины $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ и $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ получили название действующих значений переменного тока и напряжения.

В выражение 11.27 для мощности переменного тока множитель $\cos \varphi$, который называют коэффициентом мощности.

Рассмотрим частные случаи.

Активное сопротивление в цепи переменного тока.

Пусть к зажимам сопротивления R (не обладающего индуктивностью и емкостью – такое сопротивление получило название активного) приложено переменное напряжение

$$u = U_m \cos \omega t. \quad 11.28$$

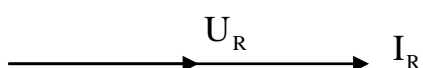
Сила тока в этом проводнике будет определяться законом Ома

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \cos \omega t = I_m \cos \omega t. \quad 11.29$$

Таким образом, между амплитудными значениями тока и напряжения имеем соотношение

$$I_m = \frac{U_m}{R},$$

Рис. 60. Векторная диаграмма для активного сопротивления.



а сдвиг фаз между током и напряжением в этом случае равен нулю. Векторная диаграмма имеет вид (рис. 60).

Индуктивность в цепи переменного тока. Индуктивное сопротивление.

Включим в цепь переменного тока катушку индуктивности L с пренебрежимо малым активным сопротивлением ($R = 0, C \rightarrow \infty$) (рис. 61). В этом случае

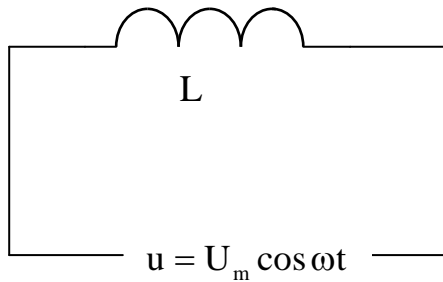


Рис. 61. Индуктивность в цепи переменного тока

закон Ома для неоднородного участка цепи запишется в виде: $\varphi_1 - \varphi_2 + E = 0$. Так как $\varphi_1 - \varphi_2 = u$, $E = -L \frac{di}{dt}$, то $u = L \frac{di}{dt}$. Отсюда найдем, что

$$di = \frac{u}{L} dt = \frac{U_m}{L} \cos \omega t dt. \quad 11.30$$

После интегрирования этого выражения будем иметь

$$i = -\frac{U_m}{\omega \cdot L} \sin \omega t = \frac{U_m}{\omega \cdot L} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = I_m \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad 11.31$$

где $I_m = \frac{U_m}{\omega \cdot L}$.

Из выражения 11.31 следует, что роль сопротивления в данном случае, играет величина

$$X_L = \omega L \quad 11.32$$

называемая **реактивным индуктивным сопротивлением**.

Из сравнения выражений 11.28 и 11.31 следует, что сдвиг фаз между током и напряжением равен $-\frac{\pi}{2}$, причем ток отстает от напряжения. Векторная диаграмма представлена на рисунке 62.

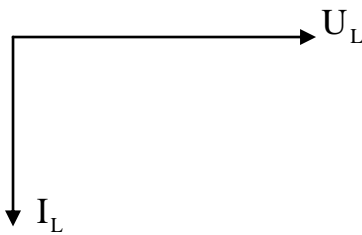


Рис. 62. Векторная диаграмма для индуктивности L .

Отметим, что возникновение реактивного индуктивного сопротивления связано с возникновением ЭДС самоиндукции в катушке, при протекании в ней переменного тока, направленной, по правилу Ленца, против основного тока.

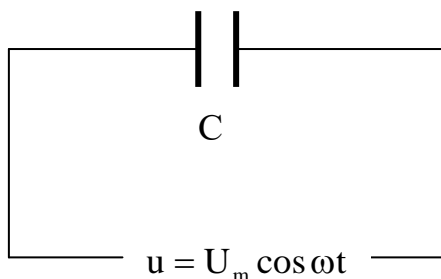


Рис. 63. Емкость в цепи переменного тока

Емкость в цепи переменного тока. Емкостное сопротивление.

Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую емкость C ($R = 0, L = 0$) (рис. 63). Индуктивность и активное сопротивление цепи малы, и ими можно пренебречь, поэтому можно считать, что все напряжение приложено к конденсатору и тогда

$$\frac{q}{C} = U_m \cos \omega t.$$

Отсюда

$$q = CU_m \cos \omega t. \quad 11.33$$

По определению $i = \frac{dq}{dt}$, поэтому, дифференцируя 11.33 по времени, получим

чим

$$i = -\omega CU_m \sin \omega t = I_m \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad 11.34$$

где
$$I_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}}.$$

 Величина

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad 11.35$$

получила название **реактивного емкостного сопротивления**.

Сравнивая 11.28 и 11.35, получаем, что на емкости сдвиг фаз между током и напряжением равен $\frac{\pi}{2}$, причем ток опережает напряжение. Векторная диаграмма приведена на рисунке 64.



Рис. 64. Векторная диаграмма для емкости C .

5.11.3. Последовательное соединение. Резонанс напряжений.

Рассмотрим цепь переменного тока, состоящую из последовательно соединенных активного сопротивления R , индуктивности L и емкости C к которой приложено напряжение $u = U_m \cos \omega t$. В цепи возникает переменный ток той же частоты ω , амплитуда и фаза которого, очевидно определяются параметрами электрической цепи R , L и C . Векторная диаграмма представлена на рисунке.

Падения напряжения на элементах цепи u_R, u_L, u_C в сумме должны быть равны приложенному к цепи напряжению u . Поэтому, сложив вектора изображающие u_R, u_L, u_C , мы получим вектор, изображающий u . Этот вектор образует с осью токов угол φ , тангенс которого, как видно из рисунка, равен

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad 11.36$$

Из прямоугольного треугольника следует, что

$$U_m^2 = (I_m R)^2 + \left(I_m \omega L - I_m \frac{1}{\omega C} \right)^2. \quad 11.37$$

Отсюда

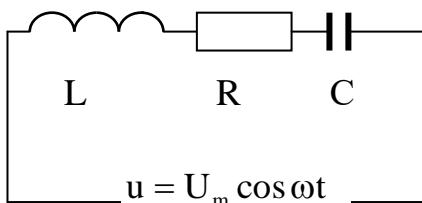


Рис. 65. Последовательное соединение R, L, C .

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad 11.38$$

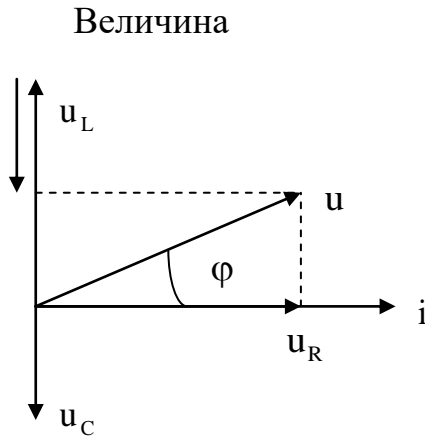


Рис. 66. Векторная диаграмма для последовательного соединения.

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad 11.39$$

называется полным сопротивлением цепи переменного тока, а величину

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad 11.40$$

называют реактивным сопротивлением цепи. Тогда

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}. \quad 11.41$$

Ток опережает напряжение, если

$\omega L < \frac{1}{\omega C}$ и отстает от напряжения в противном случае. При $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ сдвиг фаз равен нулю. Отсюда следует, что резонансная частота

$$\omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad 11.42$$

При этом полное сопротивление цепи $Z = R$ имеет минимальное значение, а сила тока в цепи достигает максимального значения $I_m = \frac{U_m}{R}$. В этом случае

падения напряжения на активном сопротивлении равно приложенному напряжению, а напряжения на конденсаторе и индуктивности одинаковы по величине и противоположны по фазе. Это явление получило название резонанса напряжений. Подставляя в формулу для напряжения на конденсаторе, силу тока и резонансную частоту получим:

$$U_{cp} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{U_m}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot U_m = Q \cdot U_m, \quad 11.43$$

где Q - добротность.

Если $\sqrt{\frac{L}{C}} > R$, то напряжение на индуктивности и емкости будет больше внешнего напряжения, приложенного к цепи.

Явление электрического резонанса широко используется в радиотехнике.

6.11.3. Параллельное соединение. Резонанс токов.

Рассмотрим цепь, образованную включенными параллельно емкостью C и индуктивностью L (рис. 67). Будем считать, что активное сопротивление обеих ветвей настолько мало, что им можно пренебречь.

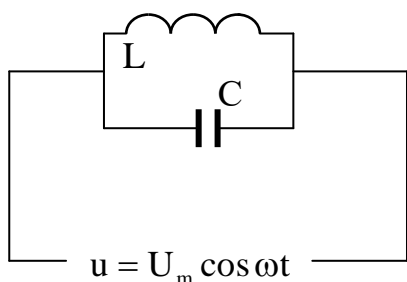


Рис. 67. Параллельное соединение L и C .

Векторная диаграмма будет иметь вид представленный на рисунке 68. Из рисунка 68 видно, что токи в отдельных ветвях I_C и I_L противоположны по фазе и тогда ток в подводящих проводах $I = I_L - I_C$. При условии $I_L = I_C$ получаем, что ток в подводящих проводах равен нулю, хотя токи в отдельных ветвях могут быть очень велики. Это явление

получило название резонанса токов. Легко получить, что и в этом случае резонансная частота определяется выражением $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

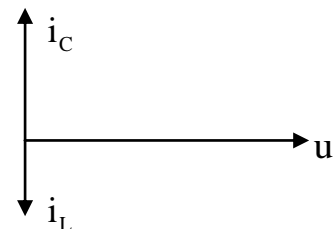


Рис. 68. Векторная диаграмма

7.11.3. Символический метод.

Расчет цепей переменного тока значительно упрощается, если воспользоваться символическим методом.

Комплексным числом Z называется число вида

$$Z = x + jy, \quad 11.44$$

где x – вещественная часть, y – мнимая часть числа, $j = \sqrt{-1}$ мнимая единица.

Комплексное число вида 11.44 можно задать с помощью декартовых координат x и y соответствующей точки. Однако то же самое число мы можем задать и с помощью полярных координат ρ и φ .

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad 11.45$$

Учитывая 11.45 комплексное число 11.44 можно задать в виде

$$Z = \rho(\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi), \quad 11.46$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа, φ – аргумент.

В математике доказываются соотношения

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi \quad \text{и} \quad e^{-j\varphi} = \cos \varphi - j \cdot \sin \varphi. \quad 11.47$$

С помощью формул 11.47 комплексное число 11.46 можно представить в показательной форме

$$Z = \rho e^{j\varphi}. \quad 11.48$$

При сложении комплексных чисел складываются отдельно их вещественные и мнимые части

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2).$$

Умножение комплексных чисел удобно производить, беря их в показательной форме

$$Z_1 \cdot Z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\varphi_2}.$$

В заключение отметим, что представление колебаний с помощью комплексных выражений тесно связано с векторными диаграммами.

Рассмотрим теперь цепь переменного тока. Пусть сила тока в цепи будет изменяться по закону $i = I_m \sin \omega t$. Пользуясь комплексными числами это колебание можно записать в виде

$$i = I_m \cdot e^{j\omega t}. \quad 11.49$$

Тогда колебания напряжения на чисто активном сопротивлении R будут выражаться формулой

$$u = I_m \cdot R \cdot e^{j\omega t}.$$

Комплексная амплитуда напряжения в этом случае является чисто вещественной

$$U_{mR} = I_m \cdot R. \quad 1150$$

Колебания напряжения на индуктивности L опережают ток на угол $\frac{\pi}{2}$ и могут быть представлены в виде

$$u_L = I_m \cdot \omega \cdot L \cdot e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} = I_m \cdot \omega \cdot L \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

Комплексная амплитуда напряжения на индуктивности будет определяться выражением

$$U_{mL} = I_m \cdot \omega \cdot L \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = I_m \cdot \omega \cdot L \cdot j. \quad 11.51$$

Рассуждая аналогично для комплексной амплитуды напряжения на емкости можно получить

$$U_{mC} = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}. \quad 11.52$$

Применение комплексных величин для расчетов цепей переменного тока можно значительно упростить, если ввести понятие комплексного сопротивления Z . Пусть I_m амплитуда тока, в каком либо участке цепи, а U_m - комплексная амплитуда напряжения. Тогда комплексное сопротивление участка определится соотношением

$$Z = \frac{U_m}{I_m}.$$

Из выражения 11.51 следует, что комплексное сопротивление индуктивности L равно

$$Z_L = j \cdot \omega \cdot L. \quad 11.53$$

Из 11.52 можно найти, что

$$Z_C = -j \cdot \frac{1}{\omega C}. \quad 11.54$$

Можно показать, что законы постоянного тока применимы не к обычным фактическим амплитудам тока, напряжения и ЭДС, но к комплексным ампли-

туда этих величин, причем под сопротивлением отдельных участков цепи нужно понимать их комплексные сопротивления.

Метод комплексных сопротивлений весьма удобен для проведения расчетов и поэтому широко применяется в электротехнике.

Рассмотрим некоторые примеры.

Последовательное соединение. При последовательном соединении общее сопротивление цепи равно сумме сопротивлений отдельных участков и поэтому комплексное сопротивление цепи будет равно

$$Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right),$$

а модуль

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}.$$

Мы получили выражение, полностью совпадающее с ранее полученным выражением 11.39 для полного сопротивления цепи переменного тока.

Параллельное соединение емкости и индуктивности. При параллельном соединении величина обратная полному сопротивлению цепи равна сумме величин обратных комплексному сопротивлению участков

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L} - \frac{\omega \cdot C}{j} = \frac{1 - \omega^2 \cdot L \cdot C}{j \cdot \omega \cdot L}.$$

Отсюда,

$$Z = \frac{j \cdot \omega \cdot L}{1 - \omega^2 \cdot L \cdot C}.$$

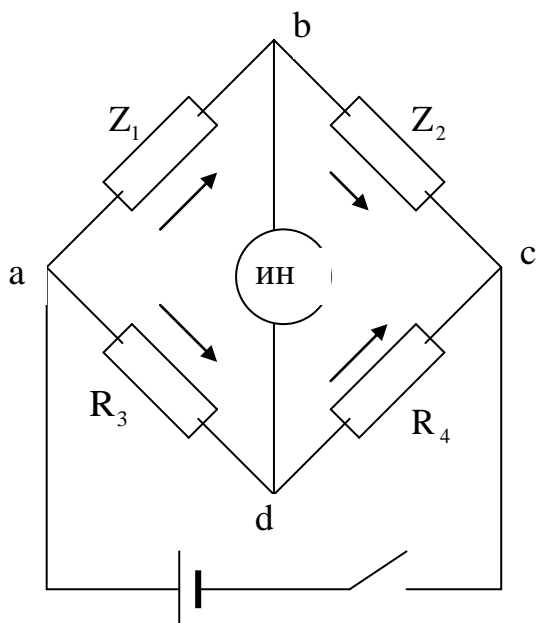


Рис. 69. Измерительный мост переменного тока.

Измерительные мосты переменного тока. Измерительные мосты переменного тока могут быть использованы для измерения емкости конденсаторов и индуктивности катушек. Схема измерительного моста переменного тока подобна схеме моста постоянного тока, но отличается от нее тем, что в два плеча схемы включаются вместо сопротивлений либо конденсаторы, либо катушки индуктивности (рис. 69).

Процесс измерения заключается в том, что, изменяя сопротивления двух других плеч, добиваются равновесия моста (ток в измерительной диагонали равен нулю). В этом случае условие равновесия моста мож-

но записать в виде

$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{Z_1}{Z_2}.$$

Заменяя комплексные сопротивления их значениями, в случае измерения емкости, можно получить

$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{C_1}{C_2} \Rightarrow C_1 = C_2 \cdot \frac{R_3}{R_4}.$$

При измерении индуктивности получается равенство

$$R_1 + j \cdot \omega \cdot L_1 = \frac{R_3}{R_4} (R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2).$$

Но для равенства двух комплексных чисел необходимо, чтобы были равны их действительные и мнимые части, т.е.

$$R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad \text{и} \quad L_1 = L_2 \frac{R_3}{R_4}.$$

Наличие двух условий соответствует тому физическому обстоятельству, что для равновесия моста необходимо, чтобы колебания напряжения на измерительной диагонали совпадали не только по величине, но и по фазе, ибо только в этом случае можно добиться того, чтобы разность потенциалов была равна нулю. Первое условие есть равновесие моста на постоянном токе, второе – на переменном токе.

Задача 17. К источнику тока с внутренним сопротивлением 2 Ом подключили катушку с индуктивностью 0,5 Гн и сопротивлением 8 Ом. Найти время, в течение которого ток в катушке, нарастая, достигнет значения равного $0,5I_m$.

При замыкании цепи, содержащей индуктивность, сила тока в цепи изменяется по закону $I = I_m \left(1 - e^{-\frac{R+r}{L}t} \right)$. И тогда, учитывая условие задачи, можно получить $e^{-\frac{R+r}{L}t} = 0,5$. Логарифмируя полученное выражение, найдем

Дано: $r = 2$ Ом
 $R = 8$ Ом
 $L = 0,5$ Гн
 $I = 0,5I_m$
 $t - ?$

$\frac{R+r}{L}t = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2 \cdot L}{R+r}$

$t = \frac{0,693 \cdot 0,5}{10} = 0,035$ (с).

Ответ: $t = 0,035$ с.

Задача 18. Обмотка соленоида со стальным сердечником имеет 10 витков на каждый сантиметр длины. Определить объемную плотность энергии магнитного поля, если по обмотке течет ток 1,6 А.

Дано: $n = 1000$ м⁻¹
 $I = 1,6$ А
 $w - ?$

Объемная плотность энергии магнитного поля определяется по формуле $w = \frac{B \cdot H}{2}$. Напряженность магнитного

поля соленоида определяется выражением $H = n \cdot I$. $H = 1,6 \cdot 1000 = 1600$ А/м. Используя зависимость $B = f(H)$ найдем индукцию магнитного поля в сердечнике $B = 1,25$ Тл. $w = \frac{1,25 \cdot 1600}{2} = 10^3$ Дж/м³.

Ответ: $w = 10^3$ Дж/м³.

Задача 19. Рамка площадью 400 см² равномерно вращается с частотой 20 с⁻¹ относительно оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной линиям индукции магнитного поля с индукцией $0,5$ Тл. Определить максимальное значение ЭДС индукции возникающей в рамке.

Дано:

$$S = 0,04 \text{ м}^2$$

$$\nu = 20 \text{ с}^{-1}$$

$$B = 0,5 \text{ Тл}$$

$$E - ?$$

Согласно закону Фарадея, ЭДС индукции, возникающая в замкнутом контуре, определяется по формуле

$$E = -\frac{d\Phi}{dt}. \text{ Магнитный поток, пронизывающий рамку, равен}$$

$\Phi = BS \cos \varphi$. При вращении рамки угол φ будет изменяться по закону $\varphi = \omega \cdot t = 2\pi \cdot \nu \cdot t$ и тогда, $\Phi = B \cdot S \cos 2\pi \cdot \nu \cdot t$.

Дифференцируя полученное выражение, получим $E = 2\pi \cdot \nu \cdot B \cdot S \cdot \cos 2\pi \nu t$ или $E = E_m \cdot \cos 2\pi \nu t$ и, следовательно, $E_m = 2\pi \cdot \nu \cdot B \cdot S$.

Вычисляя, найдем $E_m = 6,28 \cdot 20 \cdot 0,5 \cdot 0,04 = 2,5$ (В).

Ответ: $E_m = 2,5$ В.

Задача 20. В колебательном контуре с емкостью C и индуктивностью L происходят свободные колебания, при которых сила тока в контуре изменяется по закону $I = I_m \cos(\omega_0 t)$. Найти зависимость напряжения на конденсаторе от времени.

Дано:

C

L

$$I = I_m \sin(\omega_0 t)$$

$$U = f(t)$$

По определению сила тока есть первая производная от заряда по времени, т.е. $I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow dq = I dt$ и, следовательно,

$dq = I_m \cdot \sin \omega_0 t \cdot dt$. Интегрируя полученное выражение, найдем $q = \frac{I_m}{\omega_0} \cos(\omega_0 t)$, но с другой стороны $q = C \cdot U$

и тогда, $U = \frac{I_m}{\omega_0 \cdot C} \cos(\omega_0 t)$. Учитывая, что при свободных

колебаниях

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

окончательно

получим

$$U = \frac{I_m}{\sqrt{\frac{C}{L}}} \cos(\omega_0 t) = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_m \cos(\omega_0 t).$$

Ответ: $U = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_m \cos(\omega_0 t).$

175. Рамка площадью 200 см^2 равномерно вращается с частотой 10 с^{-1} относительно оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной линиям индукции однородного магнитного поля с индукцией $0,2 \text{ Тл}$. Каково среднее значение ЭДС индукции за время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменяется от нуля до максимального значения?

176. Рамка площадью 200 см^2 равномерно вращается с частотой 10 с^{-1} относительно оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной линиям индукции однородного магнитного поля с индукцией $0,2 \text{ Тл}$. Каково среднее значение ЭДС индукции за время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменяется от нуля до максимального значения?

177. К источнику тока с внутренним сопротивлением 2 Ом подключают катушку с индуктивностью $0,5 \text{ Гн}$ и сопротивлением 8 Ом . Определить время, по истечении которого ток в цепи достигает $0,5$ предельного значения.

178. Определить силу тока в цепи через $0,01 \text{ с}$ после ее размыкания. Сопротивление цепи 20 Ом , индуктивность $0,1 \text{ Гн}$. Сила тока до размыкания цепи была равна 50 А .

179. Источник тока замкнули на катушку с сопротивлением 10 Ом и индуктивностью 1 Гн . Через сколько времени сила тока в цепи достигнет $0,9$ предельного значения.

180. Сила тока в цепи с индуктивностью 1 Гн в течение $0,69 \text{ с}$ уменьшается до $0,001$ первоначального значения. Определить сопротивление цепи.

181. Рамка из провода сопротивлением $0,01 \text{ Ом}$ равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $0,05 \text{ Тл}$. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Площадь рамки равна 200 см^2 . Найти, какой заряд протечет через рамку за время поворота ее на угол 30° в следующем случае: от 0 до 30° .

182. В одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом по которому течет ток 50 А расположена плоская рамка так, что большая сторона ее длиной 65 см параллельна проводу, а расстояние от провода до ближайшей из них равно ее ширине. Какой магнитный поток пронизывает рамку?

183. В одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом по которому течет ток 50 А расположена плоская квадратная рамка со стороной 30

см. Рамка расположена так, что ближайшая сторона ее удалена от провода на расстояние 20 см. Какой магнитный поток пронизывает рамку?

184. Тонкий медный провод массой 1 г согнут в виде квадрата, и концы его замкнуты. Квадрат помещен в магнитное поле с индукцией 0,1 Тл так, что плоскость его перпендикулярна линиям индукции поля. Определить заряд, который протечет по проводнику, если квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянуть в линию.

185. Рамка, содержащая 1000 витков 100 см^2 , равномерно вращается с частотой 10 с^{-1} в магнитном поле с напряженностью $10^4 \frac{\text{А}}{\text{м}}$. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции магнитного поля. Определить максимальную ЭДС индукции, возникающую в контуре.

186. По обмотке длинного соленоида со стальным сердечником течет ток 2 А. Определить объемную плотность энергии магнитного поля в сердечнике, если число витков на каждом сантиметре длины соленоида равна 7 см^{-1} .

187. Найти объемную плотность энергии магнитного поля в железном сердечнике соленоида, если напряженность намагничивающего поля равна $1600 \frac{\text{А}}{\text{м}}$.

188. Напряженность магнитного поля тороида со стальным сердечником возросла от $200 \frac{\text{А}}{\text{м}}$ до $800 \frac{\text{А}}{\text{м}}$. Определить, во сколько раз изменилась при этом объемная энергия магнитного поля.

189. На расстоянии 1 м от длинного тонкого прямого провода с током 10 А находится кольцо радиусом 1 см. Кольцо расположено так, что магнитный поток, пронизывающий, его максимален. Какой заряд протечет по кольцу при выключении тока в проводнике?

190. При некоторой силе тока плотность энергии магнитного поля соленоида (без сердечника) равна $0,2 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$. Во сколько раз увеличится объемная плотность энергии при той же силе тока, если в соленоид вставить железный сердечник?

191. Индукция магнитного поля тороида со стальным сердечником возросла от 0,5 Тл до 1 Тл. Найти, во сколько раз изменилась объемная плотность энергии магнитного поля.

192. На железный сердечник длиной 20 см малого сечения намотано 200 витков. Определить объемную плотность энергии магнитного поля в железе при силе тока 0,4 А.

193. Проволочное кольцо радиусом 10 см лежит на столе. Какой заряд протечет по кольцу, если его повернуть с одной стороны на другую? Сопротивление кольца 1 Ом. Вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна 50 мкТл.

194. Обмотка тороида с немагнитным сердечником имеет 10 витков на каждый сантиметр длины. Определить объемную плотность энергии магнитного поля, если по обмотке течет ток 16 А.

195. В однородном магнитном поле с индукцией 0,4 Тл в плоскости, перпендикулярной линиям индукции поля, вращается стержень длиной 10 см. Ось вращения проходит через один из концов стержня. Определить разность потенциалов на концах стержня при частоте вращения 10 с^{-1} .

196. При индукции магнитного поля, равной 1 Тл, объемная плотность энергии магнитного поля в железе равна $200 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$. Определить магнитную проницаемость железа в этих условиях.

197. Магнитная индукция поля между полюсами генератора равна 0,8 Тл. Ротор имеет 100 витков площадью 400 см^2 . Определить частоту вращения ротора, если максимальное значение ЭДС индукции равно 200 В.

198. Катушка содержит 1000 витков. Площадь поперечного сердечника 10 см^2 . По обмотке течет ток, создающий магнитное поле с индукцией 1,5 Тл. Найти среднее значение ЭДС индукции, возникающей в катушке, если ток уменьшается до нуля за время равное 500 мкс.

199. Обмотка катушки состоит из одного слоя, плотно прилегающих друг к другу витков медного провода диаметром 0,2 мм. Диаметр катушки равен 5 см. По катушке течет ток 1 А. Определить заряд, протекающий через катушку, если ее концы замкнуть накоротко.

200. Сила тока в колебательном контуре изменяется по закону: $i = -0,02 \sin 400\pi t$. Индуктивность контура 1 Гн. Найти: а) период колебания, б) емкость контура, в) максимальное напряжение на конденсаторе.

201. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 7 мкФ, катушки с индуктивностью 0,23 Гн и сопротивления 40 Ом. Заряд конденсатора $5,6 \cdot 10^{-4}$ Кл. Найти: а) период колебания, б) логарифмический декремент затухания, в) написать уравнение зависимости напряжения на обкладках конденсатора от времени.

202. Изменение заряда конденсатора колебательного контура задано уравнением: $q = 0,5 \cdot 10^{-6} \cos 200\pi t$. Емкость конденсатора 0,05 мкФ. Определить: а) период колебаний, б) максимальную энергию электрического поля.

203. В контуре, добротность которого 50 и собственная частота колебаний 5,5 кГц, возникают затухающие колебания. Через сколько времени энергия, запасенная в контуре, уменьшится в два раза?

204. Чему равно отношение энергии магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля для момента времени $t = \frac{T}{8}$?

205. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 0,2 мкФ и катушки с индуктивностью $5,07 \cdot 10^{-3}$ Гн. При каком логарифмическом декре-

менте затухания напряжение на конденсаторе за 10^{-3} с уменьшится в 3 раза? Чему при этом равно сопротивление контура?

206. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $0,025$ мкФ и катушки с индуктивностью $1,015$ Гн. Сопротивлением контура можно пренебречь. Заряд конденсатора $2,5 \cdot 10^{-6}$ Кл. Написать для данного контура уравнения зависимости напряжения на конденсаторе и силы тока в цепи от времени.

207. Конденсатор емкостью 1 мкФ и катушка с индуктивностью 1 мГн и активным сопротивлением $0,1$ Ом соединены последовательно к источнику переменного напряжения. Определить резонансную частоту.

208. В контуре с емкостью C и индуктивностью L происходят свободные затухающие колебания, при которых сила тока изменяется по закону: $i = I_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin \omega t$. Найти зависимость напряжения на конденсаторе от времени.

209. Обмотка соленоида с железным сердечником содержит 500 витков. Длина сердечника равна 50 см. Как и во сколько раз изменится индуктивность соленоида, если сила тока, протекающего по обмотке, возрастет от $0,1$ до 1 А?

210. Колебательный контур имеет емкость 10 мкФ, индуктивность 25 мГн и сопротивление 1 Ом. Через сколько колебаний амплитуда тока в этом контуре уменьшится в "е" раз?

211. Цепь, содержащая последовательно соединенные конденсатор и катушку индуктивности с активным сопротивлением, подключена к источнику переменного напряжения частоту которого можно изменять, не меняя его амплитуды. При частотах ω_1 и ω_2 амплитуда тока оказалась в n раз меньше резонансной амплитуды. Найти резонансную частоту.

212. Напряжение на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону $u = 60 \cos 10^4 \pi t$. Емкость конденсатора $0,1$ мкФ. Найти: а) период колебания, б) индуктивность контура, в) закон изменения силы тока в цепи.

213. Найти время, за которое амплитуда колебаний в контуре с добротностью 5000 уменьшается в два раза, если частота колебаний $2,2$ МГц.

214. Катушка с индуктивностью 7 мГн и активным сопротивлением 44 Ом подключают сначала к источнику постоянного напряжения U_0 , а затем к генератору переменного напряжения с действующим значением напряжения U_0 . При какой частоте генератора мощность, потребляемая катушкой, будет в пять раз меньше, чем в первом случае?

215. Катушка длиной 50 см и площадью поперечного сечения 10 см² включена в цепь переменного тока с частотой 50 Гц. Число витков катушки 3000 . Найти активное сопротивление катушки, если известно, что сдвиг фаз между током и напряжением равен 60° .

216. Обмотка катушки состоит из 500 витков медного провода сечением 1 мм². Длина катушки 50 см и ее диаметр 5 см. При какой частоте переменного тока ее полное сопротивление будет в 2 раза больше ее активного сопротивления?

217. Катушка длиной 25 см и радиусом 2 см имеет обмотку из 1000 витков медного провода сечением 1 мм^2 . Катушка включена в цепь переменного тока частотой 50 Гц. Во сколько раз активное сопротивление катушки меньше ее полного сопротивления.

218. Конденсатор емкостью 20 мкФ и активное сопротивление 150 Ом включены последовательно в цепь переменного тока с частотой 50 Гц. Во сколько раз напряжение на конденсаторе меньше напряжения приложенного к цепи?

219. Индуктивность 2,26 мГн и активное сопротивление R включены параллельно в цепь переменного тока частотой 50 Гц. Найти сопротивление R , если известно, что сдвиг фаз между током и напряжением равен 60° .

220. Активное сопротивление R и индуктивность L соединены параллельно и включены в цепь переменного тока напряжением 127 В и частотой 50 Гц. Найти активное сопротивление R и индуктивность L , если известно, что мощность, поглощаемая цепью, равна 404 Вт и сдвиг фаз между током и напряжением равен 60° .

221. В цепь переменного тока напряжением 220 В включены последовательно емкость C , активное сопротивление R и индуктивность L . Найти напряжение на активном сопротивлении U_R , если известно, что $U_C = 2U_R$ и $U_L = 3U_R$.

222. Катушка с активным сопротивлением 10 Ом и индуктивностью L включена в цепь переменного тока напряжением 127 В и частотой 50 Гц. Найти индуктивность катушки, если известно, что катушка поглощает мощность 400 Вт, а сдвиг фаз между током и напряжением равен 60° .

223. Активное сопротивление 20 Ом и индуктивность 0,1 Гн соединены последовательно и включены в цепь переменного тока напряжением 220 В и частотой 50 Гц. Какая мощность будет выделяться в цепи?

224. Конденсатор и электрическая лампочка соединены последовательно и включены в цепь переменного тока напряжением 440 В и частотой 50 Гц. Какую емкость должен иметь конденсатор, чтобы через лампочку протекал ток 0,5 А при напряжении на ней 110 В.

225. Катушка с активным сопротивлением 20 Ом и индуктивностью 0,11 Гн включена в цепь переменного тока напряжением 127 В и частотой 50 Гц. Найти мощность, потребляемую катушкой.

226. В цепь переменного тока напряжением 220 В и частотой 50 Гц включены последовательно емкость 35,4 мкФ, индуктивность 0,7 Гн и активное сопротивление 100 Ом. Определить мощность, выделяющуюся в цепи.

227. Конденсатор емкостью 20 мкФ и активное сопротивление 150 Ом соединены параллельно и включены в цепь переменного тока с частотой 50 Гц. Во сколько раз ток в конденсаторе меньше общего тока в цепи?

228. Активное сопротивление 10 Ом и индуктивность 0,05 Гн соединены параллельно и включены в цепь переменного тока с частотой 50 Гц. Во сколько раз ток в индуктивности меньше тока в неразветвленной части цепи?

229. Используя символический метод определить полное сопротивление Z и сдвиг фаз $\text{tg } \varphi$ между током и напряжением при последовательном соединении активного сопротивления R и индуктивности L .

230. Используя символический метод определить полное сопротивление Z и сдвиг фаз $\text{tg } \varphi$ между током и напряжением при последовательном соединении емкости C и индуктивности L .

231. Используя символический метод определить полное сопротивление Z и сдвиг фаз $\text{tg } \varphi$ между током и напряжением при последовательном соединении активного сопротивления R и емкости C .

232. Используя символический метод определить полное сопротивление Z и сдвиг фаз $\text{tg } \varphi$ между током и напряжением при параллельном соединении активного сопротивления R и индуктивности L .

233. Используя символический метод определить полное сопротивление Z и сдвиг фаз $\text{tg } \varphi$ между током и напряжением при параллельном соединении емкости C и индуктивности L .

234. Используя символический метод определить полное сопротивление Z и сдвиг фаз $\text{tg } \varphi$ между током и напряжением при параллельном соединении активного сопротивления R и емкости C .

235. Параллельно активному сопротивлению R включены последовательно соединенные емкость C и индуктивность L . Используя символический метод определить полное сопротивление Z и сдвиг фаз $\text{tg } \varphi$ между током и напряжением.

236. Параллельно конденсатору емкостью C подключена катушка индуктивности с активным сопротивлением R и индуктивностью L . Используя символический метод определить полное сопротивление Z и сдвиг фаз $\text{tg } \varphi$ между током и напряжением.

237. Параллельно индуктивности L включены последовательно соединенные емкость C и активное сопротивление R . Используя символический метод определить полное сопротивление Z и сдвиг фаз $\text{tg } \varphi$ между током и напряжением.

238. Параллельно конденсатору емкостью C подключена катушка индуктивности с активным сопротивлением R и индуктивностью L . Используя символический метод определить полное сопротивление Z и сдвиг фаз $\text{tg } \varphi$ между током и напряжением.

239. Параллельно активному сопротивлению R включены последовательно соединенные емкость C и индуктивность L . Используя символический метод определить полное сопротивление Z и сдвиг фаз $\text{tg } \varphi$ между током и напряжением.

240. Используя символический метод определить полное сопротивление Z и сдвиг фаз $\text{tg } \varphi$ между током и напряжением при параллельном соединении активного сопротивления R и индуктивности L .

241. Используя символический метод определить полное сопротивление Z и сдвиг фаз $\operatorname{tg} \varphi$ между током и напряжением при параллельном соединении емкости C и индуктивности L .

242. Параллельно индуктивности L включены последовательно соединенные емкость C и активное сопротивление R . Используя символический метод определить полное сопротивление Z и сдвиг фаз $\operatorname{tg} \varphi$ между током и напряжением.

Тема 12.3. ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕОРИИ ПРОВОДИМОСТИ МЕТАЛЛОВ

1.12.3. Экспериментальное доказательство электронной природы тока в металлах. Эффект Холла и его применение.

Согласно классической теории проводимости металлы представляют собой кристаллическую решетку, в которой движутся свободные электроны. Эта теория была создана Друде и детально разработана Лоренцем. Ее основные положения подтверждены целым рядом опытов.

Первый из них опыт Рикке (1901 г.), в котором электрический ток пропущен через три, тщательно взвешенных и последовательно соединенных цилиндра ($\text{Cu} - \text{Al} - \text{Cu}$), в течение года. Несмотря на то, что через цилиндры протекал огромный заряд ($4 \cdot 10^6$ Кл), обнаружить следы переноса вещества не удалось. Это явилось доказательством того, что ионы металлов в переносе заряда не участвуют.

В опыте Манделъштамма и Папалески (1913 г.) катушку из большого числа витков приводили в быстрые крутильные колебания и при этом в телефоне, на который была замкнута катушка, прослушивался шум, обусловленный движением электронов.

В опыте Стюарта и Толмена (1916 г.) катушку приводили во вращение (при этом линейная скорость проводника достигала $300 \frac{\text{м}}{\text{с}}$) и затем резко тормозили. Возникающий при этом импульс тока регистрировался баллистическим гальванометром. По величине импульса тока можно было определить удельный заряд частиц переносивших заряд.

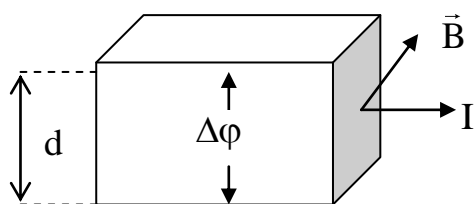


Рис. 70. Эффект Холла.

Стюарт и Толмен показали, что у всех металлов удельный заряд частиц одинаков и совпадает со значением удельного заряда электрона, а знак заряда отрицательный.

Эффект Холла – возникновение в проводнике (или полупроводнике) с током плотностью \vec{j} , расположенном в магнит-

ном поле с индукцией \vec{B} , перпендикулярной вектору плотности тока, поперечной разности потенциалов (рис.70)

$$\Delta\varphi = R \cdot \frac{I \cdot B}{d}, \quad 12.1$$

где $R = \frac{1}{e \cdot n}$ - постоянная Холла, зависящая от рода вещества, d – толщина образца.

По измеренному значению постоянной Холла R можно:

- определить концентрацию носителей при известном заряде;
- определить знак заряда, так как знак эффекта совпадает со знаком носителей заряда.

Эффект Холла наиболее эффективный метод изучения энергии носителей заряда в металлах и полупроводниках и используется при создании датчиков Холла.

2.12.3. Классическая теория электронного газа в твердом теле.

Существование свободных электронов в металлах можно следующим образом: при образовании кристаллической решетки валентные электроны, наиболее слабо связанные с атомом, отрываются от него и становятся свободными. Свободные электроны образуют электронный газ, обладающий всеми свойствами идеального газа.

Применяя выводы молекулярно-кинетической теории к электронному газу, можно найти среднюю скорость теплового движения электронов:

$$u = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \Rightarrow u = 10^5 \frac{M}{c}.$$

Тепловое движение, являясь хаотическим, не может привести к возникновению тока.

Из формулы плотности тока $j = e \cdot n \cdot v$ можно определить среднюю скорость упорядоченного движения электронов $v = 10^{-3} \frac{M}{c}$ и таким образом можно утверждать, что $v \ll u$.

Пусть в металлическом проводнике существует электрическое поле с напряженностью \vec{E} . В этом случае на электрон будет действовать сила $F = e \cdot E$ и он будет двигаться с ускорением $a = \frac{e \cdot E}{m}$. К концу свободного пробега электрон приобретает скорость $v_m = \frac{e \cdot E \cdot \tau}{m}$, где τ - время свободного пробега. Согласно теории Друде, электрон при столкновении с ионом отдает ему всю энергию и останавливается, поэтому начальная скорость электрона равна нулю, т.е. $v_0 = 0$. Так как электрон движется равноускоренно, то средняя скорость электрона

трона $v = \frac{v_m + v_0}{2} = \frac{e \cdot E \cdot \tau}{2m}$. Учитывая, что время свободного пробега электрона

$\tau = \frac{\lambda}{u}$, где λ - длина свободного пробега электрона, получим, что скорость упорядоченного движения электронов в металле $v = \frac{e \cdot E \cdot \lambda}{2m \cdot u}$.

Учитывая, полученное значение скорости для плотности тока в металле получим выражение

$$j = \frac{n \cdot e^2 \cdot E \cdot \lambda}{2m \cdot u}. \quad 12.2$$

Если ввести обозначение

$$\gamma = \frac{n \cdot e^2 \cdot \lambda}{2mu}, \quad 12.3$$

то будем иметь закон Ома в дифференциальной форме

$$j = \gamma \cdot E. \quad 12.4$$

К концу разгона электрон будет обладать кинетической энергией

$$T = \frac{mv_m^2}{2} = \frac{e^2 \cdot E^2 \cdot \lambda^2}{2m \cdot u}$$

Эту энергию электрон при столкновении с ионом будет передавать ему и поэтому, проводник с током будет нагреваться. В единицу времени электрон будет испытывать число столкновений $z = \frac{1}{\tau} = \frac{u}{\lambda}$. Так как концентрация электронов равна n , то в единице объема в единицу времени, будет происходить

число столкновений $Z = z \cdot n = \frac{n \cdot u}{\lambda}$, и в единице объема будет выделяться энергия

$$w = ZT = \frac{n \cdot e^2 \cdot E^2 \cdot \lambda}{2m \cdot u}. \quad 12.5$$

Учитывая обозначение 12.3, получим закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме $w = \lambda \cdot E^2$.

3.12.3. Закон Видемана – Франца.

Металлы обладают не только высокой электропроводностью, но и высокой теплопроводностью. Это объясняется тем, что носителями заряда и энергии в металлах являются одни и те же частицы - электроны, которые, перемещаясь в проводнике, переносят не только заряд, но и энергию.

В 1853 году Видеман и Франц на опыте установили закон, согласно которому отношение коэффициента теплопроводности χ к удельной проводимости

γ для всех металлов при одной и той же температуре одинаково и линейно растет с ростом температуры

$$\frac{\chi}{\gamma} = \beta T. \quad 12.6$$

Найдем значение β для идеального электронного газа. Из молекулярно-кинетической теории следует, что коэффициент теплопроводности χ определяется по формуле

$$\chi = \frac{1}{3} n \cdot m \cdot u \cdot \lambda \cdot c_v, \quad 12.7$$

где

$$c_v = \frac{3}{2} \cdot \frac{k}{m} \quad 12.8$$

удельная теплоемкость электронного газа при постоянном объеме.

Подставляя 12.8, в выражение 12.7 получим:

$$\chi = \frac{1}{2} n \cdot u \cdot k \cdot \lambda. \quad 12.9$$

Тогда для отношения $\frac{\chi}{\gamma}$ с учетом 12.3 получим выражение:

$$\frac{\chi}{\gamma} = \frac{3 \cdot k^2}{e^2} \cdot T.$$

Если обозначить

$$\beta = \frac{3k^2}{e^2},$$

то получим закон Видемана – Франца 12.6. Полученное значение β хорошо согласуется с экспериментальными данными.

4.12.3. Трудности классической теории.

Несмотря на очевидные успехи в объяснении ряда законов классическая электронная теория проводимости металлов столкнулась с рядом существенных затруднений:

- прежде всего, классическая теория не могла объяснить появления свободных электронов в металлах;

- мы пришли к выводу о том, что $\gamma = \frac{ne^2\lambda}{2m\mu}$, но средняя скорость теплового

движения электронов $u \sim \sqrt{T}$ и, следовательно, зависимость удельной проводимости от температуры должна иметь вид $\gamma \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$, но опыт

говорит о том, что $\gamma \sim \frac{1}{T}$;

- если учесть наличие электронного газа, то теплоемкость металла должна быть в 1,5 раза больше, чем у диэлектриков, чего на самом деле нет;
- Совпадение опытного и теоретического значения β в законе Видемана – Франца оказалось случайным. Когда Лоренц учел распределение электронов по скоростям, то он получил значение β резко отличающееся от опытного значения.

Указанные затруднения классической теории были разрешены в квантовой теории.

Тема 13.3. КОНТАКТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В МЕТАЛЛАХ

1.13.3. Работа выхода электронов из металла. Виды электронной эмиссии.

Как показывает опыт, свободные электроны при обычных температурах практически не покидают металл, несмотря на то, что имеют очень высокую скорость. Это означает, что в поверхностном слое металла существует электрическое поле, препятствующее вылету электронов из металла. Чтобы покинуть металл, электрон должен совершить работу по преодолению сил отталкивания. Эту работу называют работой выхода электронов из металла.

Рассмотрим процесс образования этого поля. Вылетая из металла, электрон индуцирует в нем положительный заряд и поэтому, будет притягиваться к нему. Под действием силы притяжения электрон возвращается обратно. При постоянной температуре металла наступает динамическое равновесие и над проводником будет находиться некоторое количество свободных электронов (электронное облако). Это облако и положительный заряд в металле создают электрическое поле, подобное полю конденсатора. Толщина этого слоя порядка 10^{-9} м и он не создает электрического поля в пространстве, но препятствует выходу электронов из металла. Разность потенциалов, возникающая в поверхностном слое металла, получила название поверхностного скачка потенциала $\Delta\phi$. В среде, окружающей металл, электрического поля нет и поэтому можно считать, что потенциал среды равен нулю, а, следовательно, внутри металла потенциал положителен и равен $\Delta\phi$. Потенциальная энергия свободного электрона в металле $W = -e \cdot \Delta\phi < 0$. Говорят, что электрон находится в потенциальной яме глубиной $e \cdot \Delta\phi$, равной работе выхода электрона из металла. Работа выхода электронов из металла зависит от его химической природы и чистоты поверхности. Подобранным определенным образом покрытие поверхности можно существенно снизить работу выхода.

Энергию, необходимую электрону для того, чтобы покинуть металл, можно сообщить различными способами:

- за счет нагревания металла – термоэлектронная эмиссия;
- вторичная электронная эмиссия – вылет электронов из металла, бомбардируемого ионами;

- автоэлектронная эмиссия – вылет электронов из металла под действием сильного электрического поля.

2.13.3. Контакт двух металлов. Контактная разность потенциалов.

Рассмотрим контакт двух металлов I и II, различных по химическому составу. Так как работа выхода электронов из металлов различна, то при соединении металлов между ними будет происходить обмен электронами. Число электронов, переходящих из одного металла в другой и обратно, зависит от работы выхода A_1 и A_2 электронов для каждого из металлов. Пусть $A_1 < A_2$, тогда большее число электронов будет переходить из металла I с меньшей работой выхода в металл II с большей работой выхода, до тех пор, пока между обоими металлами не установится контактная разность потенциалов $\Delta\phi_1$, препятствующая дальнейшему преимущественному переходу электронов из металла I в металл II.

При этом металл I с меньшей работой выхода электронов заряжается положительно, а металл II с большей работой выхода – отрицательно.

Условием равновесия электронных потоков в обоих направлениях является равенство уровней Ферми в обоих металлах и между ними возникает **внешняя контактная разность потенциалов**

$$\Delta\phi_1 = \frac{A_1 - A_2}{e}. \quad 13.1$$

Величина $\Delta\phi_1$ может достигать нескольких вольт, зависит от строения металлов и состояния их поверхности. Поэтому $\Delta\phi_1$ можно изменять обработкой поверхностей, введением примесей и сплавлением с другими металлами.

Рассмотрим теперь возникновение внутренней контактной разности потенциалов $\Delta\phi_2$. Допустим, что концентрация свободных электронов равна n_1 и n_2 , соответственно для металлов I и II удовлетворяет условию $n_1 > n_2$. Тогда диффузионные потоки свободных электронов в обоих металлах будут не одинаковы. Поток диффузии электронов из металла I будет больше потока диффузии в обратном направлении, и металл I будет заряжаться положительно, а металл II – отрицательно. В результате этого между металлами возникнет разность потенциалов $\Delta\phi_2$ и появится электрическое поле \vec{E} , которое вызовет дополнительное (дрейфовое или переносное) движение электронов в обратном направлении – от металла II к металлу I, в результате чего общее количество электронов, переходящих из металла I в металл II будет уменьшаться, а в противоположном – увеличиваться. При некоторой разности потенциалов $\Delta\phi_2$ между металлами установится динамическое равновесие, и потенциалы металлов уже не будут меняться. Эта разность потенциалов и является **внутренней контактной разностью потенциалов** $\Delta\phi_2$ обоих металлов.

Классическая электронная теория (Друде – Лоренца) позволяет вывести формулу для $\Delta\phi_2$. Приняв, что для электронного газа в металле справедливо

классическое распределение Больцмана, можно написать $n_2 = n_1 e^{-\frac{e \cdot \Delta\varphi_2}{kT}}$. Прологарифмировав это выражение получим

$$\Delta\varphi_2 = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_1}{n_2}. \quad 13.2$$

Таким образом, при тесном соприкосновении двух металлов, между ними устанавливается контактная разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = \frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_1}{n_2}. \quad 13.3$$

Согласно закону Ома в дифференциальной форме, плотность тока \vec{j} внутри металла равна $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. Так как при равновесии $\vec{j} = 0$, то и электрическое поле \vec{E} в любой точке сечения металлов равно нулю. Это означает, что поле \vec{E} существует только в тонком пограничном слое между обоими металлами, на котором и сосредоточена вся контактная разность потенциалов, определяемая выражением 13.3.

Мы получили выражение 13.3, которое выражает *первый закон Вольта, который экспериментально показал, что контактная разность потенциалов зависит только от температуры и химического состава металлов.*

Вольта установил, что если металлы Al, Zn, Sn, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Cu, Au, Pt, Pd привести в контакт в указанной последовательности, каждый предыдущий при соприкосновении с одним из последующих металлов зарядится положительно. Этот ряд называется рядом Вольта.

Рассмотрим последовательное соединение разнородных металлов:

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_1}{n_2} \\ \varphi_2 - \varphi_3 &= \frac{A_2 - A_3}{e} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_2}{n_3} \end{aligned}$$

Суммируя эти выражения можно получить:

$$\varphi_1 - \varphi_3 = \frac{A_1 - A_3}{e} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_1}{n_3}. \quad 13.4$$

Из выражения 13.4 следует, что контактная разность потенциалов не зависит от промежуточных проводников и равна контактной разности потенциалов возникающей при соединении крайних проводников. Таким образом, если создать замкнутую цепь из разнородных металлов, то ЭДС в ней будет равна нулю, это и есть второй закон Вольта.

3.13.3. Термоэлектрические явления.

Явление Зеебека. Рассмотрим замкнутую цепь, составленную из двух разнородных металлов. Ранее мы показали, что при одинаковой температуре контактов ЭДС в цепи будет равна нулю. Таким образом, хотя в каждом из контак-

тов и возникает ЭДС, эти ЭДС равны по величине и противоположны по знаку и поэтому полная ЭДС цепи равна нулю.

Не то будет, если температура контактов не одинакова. Так как внутренняя разность потенциалов зависит от температуры, то теперь их сумма не будет равна нулю. Поэтому не будет равна нулю и полная ЭДС цепи, и в цепи появляется электрический ток. Это явление получило название термоэлектричества или явления Зеебека.

В простейшем случае, когда цепь состоит из двух различных проводников, она называется термоэлементом или термопарой.

Термопара состоит из двух различных металлов I и II. Одни концы металлов сварены между собой (точка 1), а другие концы (точка 2) присоединены к цепи мV или другому измерительному прибору. Сваренные концы помещают в среду с температурой T_1 , которую надо измерить, а свободные концы должны находиться при одинаковой температуре T_2 , но всегда $T_1 > T_2$. Применяя к термопаре равенство 13.2, получим:

$$E = \frac{k}{e} \ln \frac{n_1}{n_2} (T_1 - T_2) = \alpha (T_1 - T_2), \quad 13.5$$

где $\alpha = \frac{k}{e} \ln \frac{n_1}{n_2}$ - называется удельной термоЭДС, зависит от материала проводников и разности температур. В интервале температур $\Delta T = 100\text{K}$ $\alpha = \text{const}$ для большинства термопар и имеет порядок величины $10^{-3} \frac{\text{В}}{\text{К}}$. Удельная термоЭДС α является основной характеристикой термопары в заданном интервале температур.

Явление Зеебека широко используется при измерении температуры в широком диапазоне и преобразовании внутренней энергии в электрическую.

Явление Пельтье. Если в цепи, состоящей из двух разнородных проводников пропускать электрический ток, то в зависимости от направления тока один из контактов будет нагреваться, другой охлаждаться. Это явление получило название явления Пельтье. В отличие от джоулевой теплоты, которая пропорциональна квадрату силы тока, теплота Пельтье пропорциональна первой степени силы тока и меняет знак при изменении направления тока.

Если пропускать ток в направлении термотока (при условии $T_1 > T_2$), то согласно опыту Пельтье спай 1, который при явлении Зеебека находился при более высокой температуре, будет теперь охлаждаться, а спай 2 – нагреваться. При изменении направления тока – наоборот.

Объяснить явление Пельтье можно следующим образом. Благодаря контактным разностям потенциала в спае 1 и 2 создаются электрические поля. Направление движения электронов при заданном направлении тока в спае 1 совпадает с напряженностью поля, а в спае 2 – противоположно полю. Следовательно, в спае 1 электрическое поле тормозит электроны, а в спае 2 –

ускоряет. В результате этого в спале 1 электроны отбирают энергию у ионов, а в спале 2 – отдают энергию ионам.

Это явление широко применяется в холодильниках.

Тема 14.3. ЭЛЕМЕНТЫ ЗОННОЙ ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

1.14.3. Дискретность энергетических уровней в атоме.

Согласно квантовой механике электрон в атоме может иметь не произвольные, а строго определенные значения энергии, т.е. энергия электрона в атоме квантуется. При переходе электрона из одного состояния в другое происходит скачкообразное изменение энергии. Распределение электронов по квантовым состояниям подчиняется принципу запрета Паули, согласно которому в одном квантовом состоянии не может быть двух одинаковых электронов, они должны отличаться какой-либо характеристикой. Следовательно, электроны не могут даже при 0 К, занимать самый низкий уровень энергии.

Электроны в атоме можно рассматривать как идеальный газ. Но если классическая теория считает, что энергия электрона может принимать произвольные значения, то в квантовой механике энергия электрона квантуется. Следовательно, электроны в атоме не подчиняются классическому распределению Максвелла, а их распределение по энергиям подчиняется распределению Ферми – Дирака. Обозначим μ_0 - химический потенциал электронного газа при $T = 0\text{К}$. Тогда число электронов $N(E)$ в квантовом состоянии с энергией E будет определяться выражением

$$N(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu_0}{kT}} + 1} \quad 14.1$$

Из 14.1 можно получить, что при $T = 0\text{К}$: если $E < \mu_0$, то $N(E) = 1$ и $N(E) = 0$ при $E > \mu_0$. Это значит, что при $T = 0\text{К}$ все уровни лежащие ниже μ_0 заполнены электронами, а все состояния с энергией больше μ_0 свободны.

Уровень энергии $E = \mu_0$ который заполняют электроны при $T = 0\text{К}$ получил название уровня Ферми. Следовательно, работу выхода электрона из металла надо отсчитывать не от дна потенциальной ямы, а от уровня Ферми.

Система частиц называется вырожденной, если ее свойства существенным образом отличаются от свойств системы, подчиняющейся классической статистике. Температура T_0 , ниже которой отчетливо проявляются квантовые свойства системы называется температурой вырождения. Температура вырождения находится из условия $kT_0 = E_F$. Соответствующие расчеты показывают, что для электронов в металле $T_0 = 10^4\text{К}$, т.е. для всех температур, при которых металл может существовать в твердом состоянии, электронный газ в металле вырожден.

2.14.3. Электронная проводимость металлов по квантовой теории.

Как мы уже указывали, классическая теория электропроводности металлов столкнулась с серьезными затруднениями. Эти трудности удалось преодолеть в квантовой теории.

Согласно квантовой теории для удельной электропроводности металлов получается выражение

$$\gamma = \frac{n \cdot e^2 \cdot \lambda_F}{m \cdot u_F}, \quad 14.2$$

где λ_F - длина свободного пробега электрона имеющего энергию Ферми E_F , u_F - скорость электрона на уровне Ферми.

Выражение 14.2 по виду совпадает с выражением 12.2, полученном в классической теории, но имеет совершенно другое физическое содержание. По квантовой теории u_F от температуры практически не зависит, а длина свободного пробега $\lambda_F \sim \frac{1}{T}$, поэтому и $\gamma \sim \frac{1}{T}$.

3.14.3. Расщепление энергетических уровней и образование зон. Электрические свойства металлов, диэлектриков и полупроводников.

Изолированные атомы имеют совпадающие схемы энергетических уровней. При образовании твердого тела из изолированных атомов происходит расщепление энергетических уровней, их смещение и образование зон. При этом наиболее заметно расщепляются лишь внешние уровни, на которых находятся валентные электроны, наиболее слабо связанные с атомом. Уровни же внутренних электронов либо почти не расщепляются, либо расщепляются очень слабо. Таким образом, внутренние электроны ведут себя как в изолированном атоме, а внешние (валентные) электроны «коллективизированы» – принадлежат всему твердому телу.

По мере сближения атомов между ними возникает все усиливающееся взаимодействие, которое приводит к изменению положения уровней. Вместо одного одинакового для всех N атомов уровня возникает N очень близких, но не совпадающих уровней. Таким образом, каждый уровень изолированного атома



Рис. 71. Энергетические зоны в твердом теле

в кристалле расщепляется на N густо расположенных уровня, образующих энергетическую зону разрешенных значений энергии.

Дозволенные значения энергии валентных электронов в кристалле объединены в зоны, разделены промежутками, в которых разрешенных значений энергии нет. Эти промежутки получили название запрещенных зон (рис. 71). Ширина разрешенной и запрещенной зоны не зависит от размеров кристалла. Таким образом, чем

больше атомов содержит кристалл, тем теснее расположены уровни в зоне. Ширина разрешенной зоны порядка нескольких эВ, поэтому расстояние между уровнями в зоне составляет величину порядка 10^{-23} эВ.

При абсолютном нуле температур энергия кристалла должна быть минимальной. Поэтому все валентные электроны заполняют уровни разрешенной зоны, возникшей из того уровня, на котором находятся валентные электроны в основном состоянии атома. Эта зона получила название валентной зоны. Более высокие разрешенные зоны (зоны проводимости) окажутся свободными от электронов. В зависимости от степени заполнения валентной зоны электронами и ширины запрещенной зоны возможны три случая, изображенные на рисунке.

1. Валентная зона заполнена электронами не полностью. Поэтому достаточно сообщить электрону энергию порядка 10^{-23} эВ, для того чтобы он перешел на более высокий энергетический уровень. Следовательно, при температуре отличной от 0К часть электронов переходит на более высокие уровни. Эти электроны могут ускоряться электрическим полем, т.е. создавать электрический ток. Таким образом, кристалл с такой схемой энергетических уровней будет представлять собой металл.
2. Валентная зона полностью заполнена электронами. Ширина запрещенной зоны $\Delta E < 3$ эВ. В этом случае тепловое движение способно перебросить электроны в зону проводимости и кристалл будет являться полупроводником.
3. Валентная зона полностью заполнена электронами, а ширина запрещенной зоны $\Delta E > 3$ эВ. В этом случае тепловое движение ни при каких температурах не может перебросить электроны в зону проводимости и кристалл будет диэлектриком.

4.14.3. Собственная проводимость полупроводников.

Собственными полупроводниками являются химически чистые полупроводники, а их проводимость получила название собственной проводимости. При $T = 0\text{К}$, собственный полупроводник ведет себя как чистый диэлектрик, так как валентная зона полностью заполнена электронами, а в зоне проводимости электронов нет.

При повышении температуры за счет энергии теплового движения электроны с верхних уровней валентной зоны перебрасываются в зону проводимости и становятся свободными. При этом в зоне проводимости появляется некоторое количество носителей зарядов - электронов, занимающих уровни вблизи дна зоны; одновременно в валентной зоне освобождается такое же количество мест на верхних уровнях. Такие свободные от электронов места на верхних уровнях полностью заполненной при абсолютном нуле валентной зоны называются дырками.

Уровень Ферми для полупроводников лежит точно посередине запрещенной зоны. Следовательно, для электронов перешедших в зону проводимости,

изменение энергии мало отличается от половины ширины запрещенной зоны. Вероятность заполнения электронами уровней зоны проводимости можно найти по формуле:

$$f(W) = e^{-\frac{\Delta E}{2kT}} \quad 14.3$$

Поскольку проводимость пропорциональна числу носителей заряда, то она должна быть пропорциональна выражению 14.3. Следовательно, проводимость полупроводников растет с температурой, изменяясь по закону

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}, \quad 14.4$$

где ΔE - ширина запрещенной зоны, γ_0 - некоторая константа, зависящая от рода полупроводника.

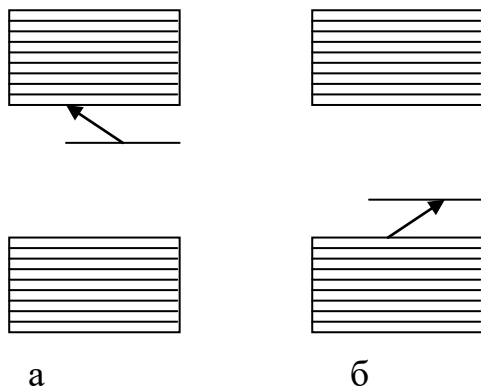


Рис. 72. Энергетические уровни примесных полупроводников: а) донорная, б) акцепторная

В отсутствие электрического поля электроны и дырки движутся хаотически и тока не создают. При появлении электрического поля на хаотическое движение накладывается упорядоченное движение: электронов против поля, дырок – по полю. Таким образом, можно утверждать, что собственная проводимость полупроводников носит электронно-дырочный характер.

5.14.3. Примесная проводимость полупроводников.

Проводимость полупроводников, обусловленная наличием примеси, получила название примесной проводимости. С точки зрения зонной теории проводимость примесных полупроводников можно объяснить следующим образом. Введение в полупроводник примеси приводит к тому, что в запрещенной зоне появляется дополнительный (локальный) уровень энергии, положение которого зависит от валентности примеси.

Введение примеси с валентностью большей, чем валентность полупроводника приводит к тому, что этот уровень располагается вблизи зоны проводимости ($\Delta E_n = 0,01\text{эВ}$) и уже при комнатной температуре электрон с этого уровня переходит в зону проводимости. Таким образом, в полупроводнике с примесью, валентность которой на единицу больше валентности основных атомов, носителями заряда являются электроны; возникает примесная электронная проводимость. Такая примесь называется донорной, а полупроводник получил название n-типа.

При наличии примеси с меньшей валентностью локальный уровень энергии располагается вблизи валентной зоны ($\Delta E_n = 0,1\text{эВ}$), и электроны переходят на него из валентной зоны. Число дырок в валентной зоне растет. Полупро-

водники с примесью, валентность которой на единицу меньше валентности основных атомов, обладают дырочной проводимостью. Такая примесь называется акцепторной, а полупроводник получил название p – типа.

В отличие от собственной проводимости, осуществляющейся одновременно и электронами, и дырками, примесная проводимость полупроводников обусловлена в основном носителями одного знака – либо электронами, либо дырками. Эти носители тока получили название основных носителей заряда. Но нужно иметь в виду, что наряду с основными носителями заряда в каждом полупроводнике имеются и не основные носители заряда (дырки в полупроводнике n - типа, электроны – в p – типе), но их концентрация во много раз меньше концентрации основных носителей.

С повышением температуры примесная проводимость быстро достигает насыщения. Вместе с тем по мере роста температуры все в большей степени начинает сказываться собственная проводимость полупроводника, обусловленная переходом электронов из валентной зоны в зону проводимости. Таким образом, при высоких температурах проводимость полупроводников складывается из примесной и собственной проводимости. При низких температурах преобладает примесная, а при высоких – собственная проводимость.

6.14.3. Контакт двух полупроводников с различным типом проводимости.

Рассмотрим контакт двух полупроводников с различным типом проводимости, так называемый $p - n$ переход. Сразу после возникновения контакта начинает идти диффузия основных носителей тока: электронов из n – типа в p – тип и дырок из p – типа в n – тип, так как концентрация их в полупроводниках различна.

Ввиду того, что основные носители уходят, то в p – области остаются отрицательно заряженные акцепторные атомы, а в n – области – положительно заряженные донорные атомы. Так как донорные и акцепторные атомы неподвижны, то в области контакта возникает двойной запирающий слой пространственного заряда (отрицательные заряды в p – области и положительные заряды в n – области). Таким образом, создается двойной запирающий слой ($p - n$ – переход) (рис. 72), протяженность которого превышает длину свободного пробега электронов и дырок. Поэтому контактная область (запорный слой) имеет большое сопротивление и препятствует дальнейшей диффузии электронов и дырок через границу раздела двух полупроводников. Этот двойной запирающий слой является для основных носителей тока потенциальным барьером высотой в несколько десятых долей вольта. Такой барьер электроны и дырки могут преодолеть только при очень высокой температуре, порядка тысяч градусов, поэтому контактный слой является для основных носителей тока запирающим слоем, имеющим повышенное сопротивление. Для не основных носителей тока этот слой не является барьером и, поэтому через контакт идет процесс диффузии не основных носителей тока. В условиях теплового равновесия при отсутствии внешнего электрического поля полный ток через $p-n$ – переход равен нулю.

Действие внешнего электрического поля существенным образом влияет на

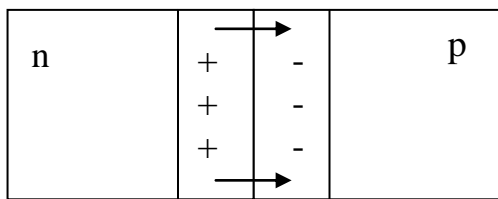


Рис. 73. Контакт двух полупроводников с различным типом проводимости

сопротивление запирающего слоя, изменяет высоту потенциального барьера и нарушает равновесие потоков носителей через барьер. Предположим, что р-полупроводник подключен к положительному полюсу источника, а минус подан на n-полупроводник. Тогда под действием внешнего электрического поля электроны в n-полупроводнике и дырки в р-полупроводнике будут двигаться к границе раздела полупроводников. При таком пропускном (прямом) направлении тока в полупроводнике толщина запирающего слоя будет непрерывно уменьшаться, и в пограничном слое будет происходить рекомбинация электронов и дырок. Граница р-n – перехода не будет представлять сопротивления для тока, вызываемого внешним напряжением. Это напряжение необходимо только для того, чтобы поддерживать встречное движение электронов и дырок.

Так как положительный потенциал приложен к р-области, то потенциальный барьер понижается (прямое смещение) и с ростом приложенного напряжения экспоненциально возрастает число основных носителей, способных преодолеть этот барьер. В результате возрастает скорость рекомбинации и появляется отличный от нуля ток, который с ростом приложенного напряжения U также экспоненциально возрастает:

$$I = I_0 \left(e^{\frac{eU}{kT}} - 1 \right), \quad 14.5$$

где I_0 - константа, зависящая от концентрации примеси и диффузионных свойств р-n - перехода, называется током насыщения.

Из уравнения 14.5 следует, что уже при небольших значениях U для прямого включения $e^{\frac{eU}{kT}} \gg 1$ и уравнение 14.5 можно приближенно записать в виде:

$$I = I_0 e^{\frac{eU}{kT}},$$

т.е. прямой ток возрастает экспоненциально с увеличением напряжения U , приложенного к слою.

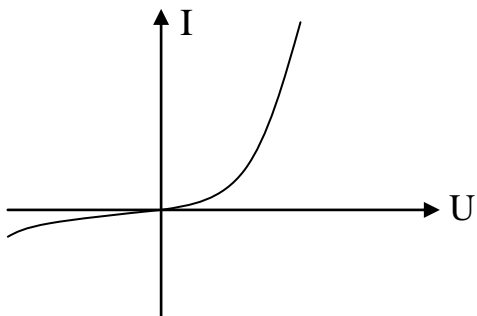


Рис. 74. Вольт-амперная характеристика р-n - перехода

Приложение отрицательного потенциала к р-области (обратное смещение) приводит к повышению потенциального барьера. Диффузия основных носителей тока через переход становится пренебрежимо малой. В то же время потоки неосновных носителей не изменяются (для них барьер не существует). В результате того, что концентрация неосновных носителей тока очень мало, то через переход при обратном напряжении ток имеет ничтожную величину по

сравнению с прямым током. При больших отрицательных напряжениях $e^{\frac{eU}{kT}} \rightarrow 0$, обратный ток согласно 14.5 стремится к насыщению $I \rightarrow I_0$.

Таким образом, зависимость тока I через р-п- переход от приложенного напряжения U (вольт-амперная характеристика) обладает ярко выраженной нелинейностью (рис.74), т.е. проводимость сильно зависит от приложенного напряжения. Благодаря этому переход является вентильным устройством, пригодным для выпрямления переменного тока. Зависимость сопротивления р-п-перехода от напряжения позволяет использовать его в качестве регулируемого сопротивления, параметрического диода, прибора, емкостью которого можно управлять.

Электронно-дырочный переход – основа различного рода полупроводниковых приборов: диодов, транзисторов, тиристоров и т.д.